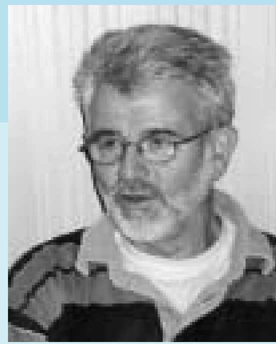
Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

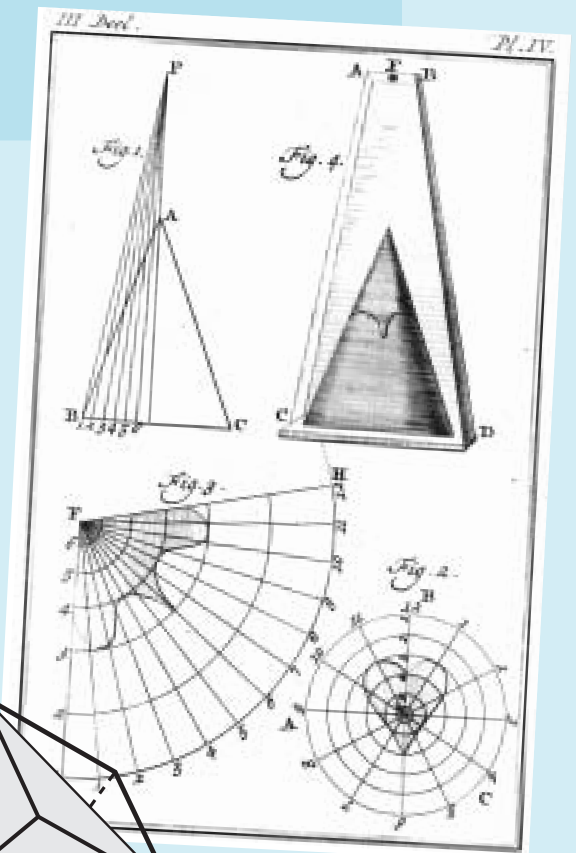
Euclides

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 74
1998-1999 nov./dec.
3

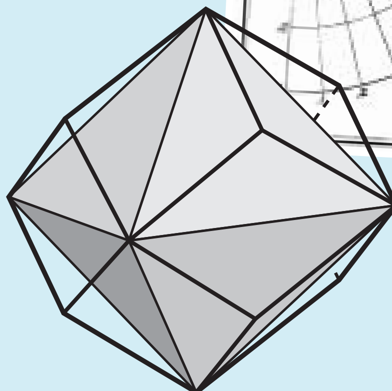


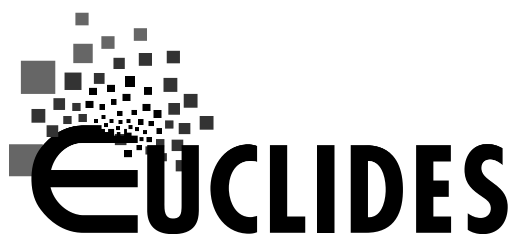




Website NVvW:
www.euronet.nl/~nvvw

Tweede Fase:
- ervaringen
- praktische opdrachten
- laatste nieuws





Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem
e-mail: cph@xs4all.nl

Richtlijnen voor artikelen:
- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.
  Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Richtlijnen voor mededelingen:
- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.euronet.nl/~nvvw

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: mkommer@knoware.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail:
113015.261@compuserve.com
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: NVvW@euronet.nl

Contributie per ver. jaar: ƒ 80,00
Studentleden: ƒ 40,00
Leden van de VVWL: ƒ 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: ƒ 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: ƒ 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: ƒ 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor ƒ 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6390890
fax 078-6390891
e-mail lbozuwa@worldonline.nl

Adresgegevens auteurs

D. Beckers
Merelstraat 16
6542 WJ Nijmegen

P. Boonstra
Leemveld 42
9407 GC Assen

R. Bosch
Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

E.M. Koerts
Johann Kuhnaustraat 8
5144 GT Waalwijk

J.Chr. Perrenet
Universiteit Maastricht
FdAW p/a Informatica
Postbus 616
6200 MD Maastricht

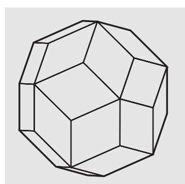
L.H. van den Raadt
Raadhuisplein 8
2101 HB Heemstede

V.E. Schmidt
Verlengde Grachtstraat 43
9717 GE Groningen

Inhoud


76


92


99

van de redactietafel

De jaarvergadering/studiedag is net weer achter de rug. Er was dit jaar wederom buitengewoon veel belangstelling. Meer dan 250 collega's waren present. Het thema: 'Op zoek naar wiskunde' was daar waarschijnlijk mede debet aan.
Onderzoeksvragen, probleemoplossen en praktische opdrachten spelen in toenemende mate een rol in het hedendaagse wiskundeonderwijs. Niet alleen in de Tweede Fase, maar ook in de onderbouw en in het vbo/mavo. Op de studiedag viel verder te constateren dat ook in het mbo en in het hbo vergelijkbare ontwikkelingen gaande zijn.
Voor de meesten van ons zijn de ervaringen met onderzoeksopdrachten nog vrij gering. De studiedag bood in ieder geval de gelegenheid ervaringen van collega's te horen en het eigen denken over zulke opdrachten weer verder aan te scherpen.

Bestuurswisseling

Sinds de jaarvergadering hebben we een nieuwe voorzitter van de Vereniging, namelijk Marian Kollenveld. Zij is Hans van Lint opgevolgd, die na 9 jaar het voorzitterschap heeft overgedragen.
De redactie wenst Marian in de komende jaren veel succes en wijsheid toe bij het representeren van de vereniging in deze woelige onderwijstijden.
Meningen van vertrekkende bestuursleden treft u aan in het interview in dit nummer.

Ervaringen uit de klas

In dit nummer treft u artikelen aan die te maken hebben met klassenervaringen en het nadenken daarover. Dat ziet de redactie graag. We zullen u ook op de hoogte houden van ervaringen van de scholen die al gestart zijn met de Tweede Fase. Maar op een of andere manier blijken die docenten het op dit moment erg druk te hebben.

VMBO

De plannen voor het nieuwe VMBO gaan ook steeds vastere vormen aannemen. Vanaf nummer 4 of 5 zullen wij u uitgebreid op de hoogte gaan houden van de rol van wiskunde in die nieuwe structuur. In eerste instantie zal het vooral weer wennen zijn aan de nieuwe terminologieën.

Oproep

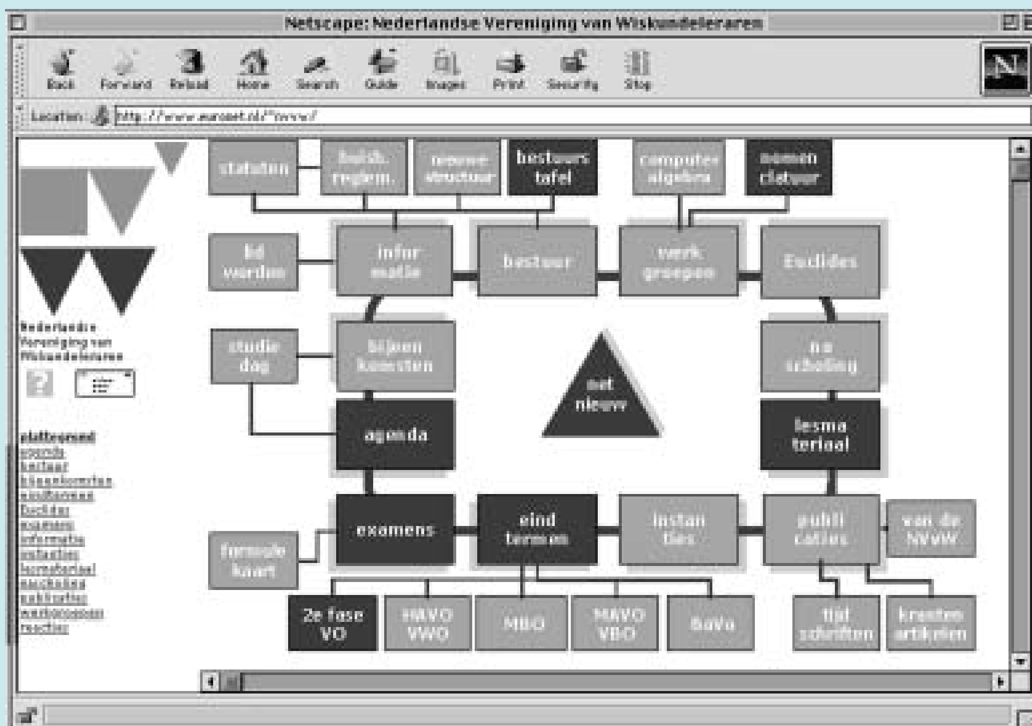
In nummer 5 of 6 van deze jaargang zullen een aantal mensen aan het woord komen, die hun mening geven over wat er nu eigenlijk in de onderbouw van havo en vwo zou moeten komen om de aansluiting van de onderbouw op de Tweede Fase te verbeteren. Er waren veel klachten over de aansluiting van de nieuwe onderbouw op de oude bovenbouwprogramma's. Maar waarschijnlijk moet, gezien de inhoud van de Tweede Fase, nu weer aan heel andere zaken gedacht worden om die aansluiting te verbeteren. Zoals bijvoorbeeld: hoe verhoudt zich de algebra in de onderbouw tot het gebruik van de grafische rekenmachine, hoeveel aandacht moet er zijn voor ruimtemeetkunde in de onderbouw vwo als er in de bovenbouw vooral weer vlakke meetkunde wordt gedaan en is het niet verstandig om ook al in de onderbouw gestructureerd aandacht te besteden aan zaken als praktische opdrachten?
Heeft u behoefte om uw mening daarover te geven, stuur deze dan naar de redactie. Stukjes of brieven zouden dan rond half januari binnen moeten zijn.

Ten slotte

Er zijn veel veranderingen in het hedendaags wiskundeonderwijs.
Een sterke Vereniging kan daarbij een belangrijke rol spelen om de belangen van docenten in te brengen bij allerlei plannen.
Bent u eigenlijk al lid? En uw collega's?

Kees Hoogland

http://www.euronet.nl/~nvvw



De vereniging nu ook op internet

Hebt u de site een keer gezien …

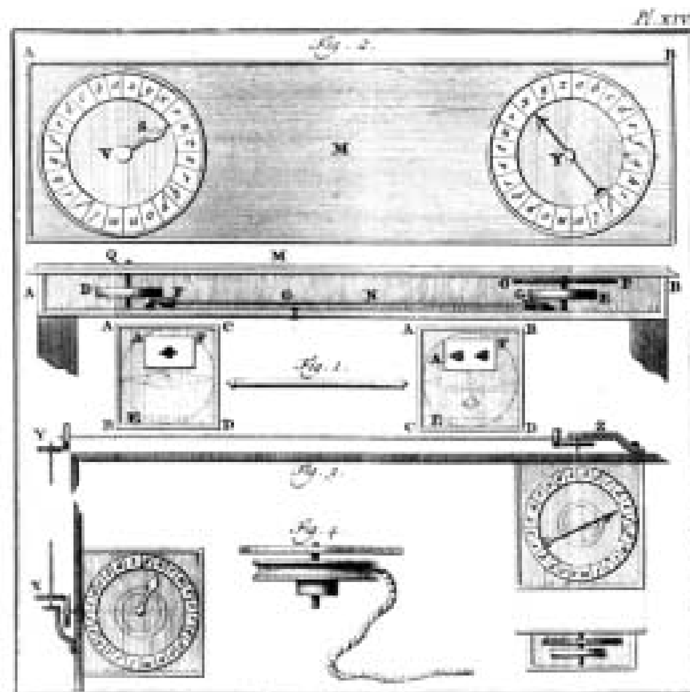
dan komt u zeker terug!

Wisconstighe Vermaecklyckheden II Recreatieve wiskunde in Nederland in de 18de eeuw: Guyot en zijn machines

Danny Beckers

Inleiding

Tijdens de achttiende eeuw, met de opkomende middenklasse en de verspreiding van het onderwijs in de wiskunde, groeide het publiek voor recreatieve wiskunde. In 1769 verscheen *Nouvelles récréations physiques et mathématiques* van Guyot. Het boek beleefde een vierde editie in 1799, en kreeg ook een Nederlandse vertaling die tussen 1771 en 1775 in vier kloeke delen verscheen onder de titel: *Nieuwe Natuur- en Wiskonstige Vermaaklijkheden.* Met het woordje 'Nieuwe' in de titel gaf de auteur te kennen een vervolg te willen aanbieden op het populaire *Récréations mathématiques et physiques.* Dat boek was in 1698 te Amsterdam verschenen onder de naam van de hoogleraar Ozanam, en beleefde in 1750 een vijfde editie. De boeken hadden ongeveer dezelfde opzet - dat van Ozanam gaf meer bewijzen dan dat van Guyot en maakte minder gebruik van apparaten. Het werk van Guyot laat zich beschouwen als een aardige pendant van de Verlichting.



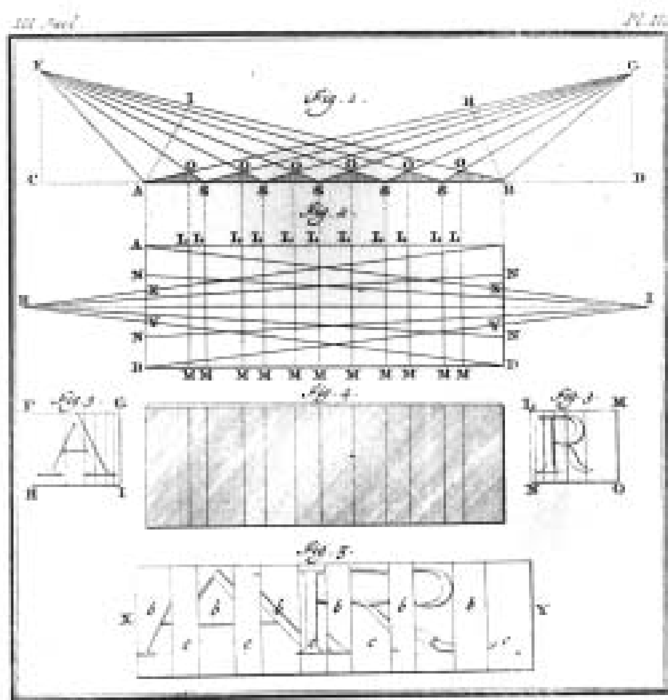
Uit het boek van Guyot: machientje met een magneet die de tweede draaischijf synchroon doet lopen met de andere.

Auteur en publiek

Guyot (zijn voornaam is mij niet bekend) had een werkplaats te Parijs waar hij machines bouwde. Zijn boeken waren eigenlijk een soort reclame: in veel van de vermakelijkheden werd gebruik gemaakt van de machines die hij produceerde. Er waren weliswaar tekeningen van die machines bij, maar die waren niet geschikt om het apparaat van na te bouwen. De apparaten konden bij hem worden besteld. Achter in elk deel van de *Nieuwe Natuur- en Wiskonstige Vermaaklijkheden* was een prijslijst ingebonden met daarop de prijzen van de apparaatjes die benodigd waren voor de in die band besproken kunstjes. Natuurlijk was het vanwege de kosten van de apparaten alleen voor de maatschappelijke toplaag van de bevolking mogelijk om deze vorm van recreatieve wiskunde te bedrijven. De apparaten hadden prijzen vanaf een paar gulden tot een paar honderd gulden; dat was meer dan veel mensen te besteden hadden. Ook de boeken zelf waren - vanwege de vele prenten - niet goedkoop [1]). Guyot zegt zelf ook nog iets over het publiek dat hij probeert te bereiken:

Hoe onnoozel en kinderachtig het grootste gedeelte der Konstjes en Vermaaklykheden, welken men in dit werk beschreven heeft, in den eersten opslag ook schynen moge, is het egter te denken, dat verstandige Lieden dezelven den voorrang geeven zullen boven eene meenigte andere geschriften, die buiten tegenspraak veel nutteloozer zyn, nadien het grootste gedeelte 'er van tot geene leering leiden, en dikwyls zelfs tot het bederf der zeden strekken; daar men integendeel dit werk leezende, terwyl men zig onschuldig vermaakt, ten minste eene oppervlakkige kennis van de Natuur- en Wiskunde verkrygen zal, welken buiten twyffel voor de Maatschappy de nuttigste en de noodzaakelykste Wetenschappen zyn.[2])

Een tamelijk serieuze ondertoon dus, voor recreatieve bezigheden.



Een toepassing van projecties in het boek van Guyot.

Volgens Guyot dienden de recreatieve bezigheden dan ook om de hersenen enige rust te geven. Vermaak dat de wetenschap tot grondslag had was volgens Guyot de beste vorm van vermaak, omdat ze alleen de geest amuseerde -niet allerlei verkeerde lusten opwekte. Bovendien was deze vorm van vermaak tevens geschikt om mee te pronken, èn de nieuwsgierigheid te prikkelen zodat er ook nog wat geleerd werd.

Wiskunde en natuurkunde

Was in de zeventiende eeuw het vakgebied van de mathematische wetenschappen zeer breed en tamelijk ongedifferentieerd, in de achttiende eeuw kwam daar verandering in. Enerzijds waren de mathematische wetenschappen zoals ze in de zeventiende eeuw had bestaan stevig ingekrompen: onder invloed van het Verlichtingsdenken werd astrologie bijvoorbeeld niet langer als een wiskundig vak beschouwd. Anderzijds waren de wiskundige vakken onderling nadrukkelijker van elkaar onderscheiden - zonder overigens wezenlijk anders van natuur te zijn. Wiskunde doordrenkte alle 'wiskundige vakken'.

Het boek van Guyot heette 'Natuur- en wiskundige vermaken': de titel suggereert voor ons dat wiskunde en natuurkunde als twee gescheiden vakgebieden werden gezien. Dat is echter misleidend: een onderscheid tussen wis- en natuurkunde was in de boeken van Guyot nauwelijks aanwezig. Met zijn titel gaf hij eerder aan dat de beide vakken onlosmakelijk met elkaar verbonden waren. Het tweede deel bevatte de zuiver wiskundige vermakelijkheden, en de andere delen bevatten grapjes uit de zogenaamde 'gemengde wiskunde'. Het derde deel was bijvoorbeeld 'gezigtkunde' getiteld, en bevatte tal van optische grapjes met spiegels, maar tevens optische constructies die de fraaiste meetkunde opleveren. Bijvoorbeeld: in dit derde deel staan zogenaamde 'wanstaltige figuren': figuren die door middel van projecties werden geconstrueerd, en er heel vreemd uitzagen, maar vanuit één of twee richtingen hun eigenlijke gedaante(n) prijs gaven. In dergelijke gevallen was in een fysisch grapje de wiskunde duidelijk aanwezig.

De 'zuivere wiskunde'-raadsels

Het tweede deel van de *Vermaaklykheden* was getiteld: 'konstjes met het getal en de kaart'. Dit deel bevatte de raadsels die zich op de zuivere wiskunde beriepen. In de inleiding gaf Guyot reeds aan dat hij het niet moeilijk ging maken: hard nadenken was alleen voor nuttige onderwerpen bestemd, en niet ten behoeve van vermaak. Dan zou het boek zijn recreatieve doel volgens Guyot voorbij schieten.[3])

Het tweede deel van Guyot's werk bestaat overwegend uit trucs met al dan niet gemerkte kaarten en spelletjes waarin een getal moest worden geraden dat iemand in gedachten had:

Laat iemant naar zyne verkiezing een Getal denken; laat hy by het dubbeld 'er van een even Getal, welk gy wilt, voegen, 4 by voorbeeld; laat hem van de helft van die Som het gedagte Getal aftrekken; het geen 'er overschiet zal de helft zyn van het bygevoegde even Getal; te weeten 2; dus zegt gy stout weg, dat 'er twee over-

Stirlinggetallen van de eerste soort

De Stirlinggetallen van de tweede soort $\left\{ {n \atop k} \right\}$ zijn gedefinieerd als het aantal verdelingen van een verzameling met n elementen in k disjuncte deelverzamelingen. De Stirlinggetallen van de eerste soort worden op een soortgelijke wijze gedefinieerd, namelijk als het aantal mogelijkheden om n objecten te verdelen in k disjuncte cykels.

Ze worden genoteerd als $\left[{n \atop k} \right]$

Voor de verdeling van 4 elementen a,b,c en d over 2 cykels vinden we de volgende mogelijkheden.

$a|bcd \quad a|bdc \quad b|acd \quad b|adc$
$c|abd \quad c|adb \quad d|abc \quad d|acb$
$ab|cd \quad ac|bd \quad ad|bc$

En dus is $\left[{4 \atop 2} \right] = 11$.

De verdeling van de elementen a, b, c en d in 3 cykels levert de volgende mogelijkheden op:

$ab|c|d \quad ac|b|d \quad ad|b|c$
$bc|a|d \quad bd|a|c \quad cd|a|b$

Zodat $\left[{4 \atop 3} \right] = 6$. Uiteraard geldt ook $\left[{4 \atop 4} \right] = 1$.

Om $\left[{4 \atop 1} \right]$ te berekenen, merken we op dat we bij het opschrijven van een 4-cykel altijd de a voorop kunnen zetten. De plaats van de andere drie elementen is dan nog helemaal vrij,

dus $\left[{4 \atop 1} \right] = 3! = 6$. In het algemeen is $\left[{n \atop 1} \right] = (n-1)!$

Zes cyclische volgordes van vier elementen

De Stirlinggetallen van de eerste soort kunnen we net zo als de binomiaalcoëfficiënten en de Stirlinggetallen van de tweede soort in een driehoeksvorm opschrijven.

$n = 1$ …	1					
$n = 2$ …	1	1				
$n = 3$ …	2	3	1			
$n = 4$ …	6	11	6	1		
$n = 5$ …	24	50	35	10	1	
$n = 6$ …	120	274	225	85	15	1

Driehoek van Stirling voor cykels

De getallen aan de randen worden bepaald door

$$\left[{n \atop 1} \right] = (n-1)! \quad \text{en} \quad \left[{n \atop n} \right] = 1$$

De overige getallen in de driehoek kunnen we met behulp van de volgende relatie berekenen

$$\left[{n \atop k} \right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k} \right] + \left[{n-1 \atop k-1} \right]$$

Zo is: 6 11 … 4
50

$$50 = 6 + 4 \cdot 11$$

Om de juistheid van de bovenstaande relatie aan te tonen, volgen we eenzelfde redenering als bij de Stirlinggetallen van de tweede soort. Kies een element, zeg a. Het element a behoort tot één van de k cykels. Als het element a een 1-cykel vormt, dan zijn er nog

$\left[{n-1 \atop k-1} \right]$ mogelijkheden om de andere $k-1$ cykels te vormen.

Als a niet een 1-cykel vormt, dan verdelen we de andere $n-1$ elementen over k cykels. Dit kan op

$\left[{n-1 \atop k} \right]$ manieren. Vervolgens kunnen we het element a op n - 1 plaatsen in één van de k cykels invoegen. Hetgeen dus

$(n-1)\left[{n-1 \atop k} \right]$ mogelijkheden geeft.

Aangezien iedere verdeling van n elementen in disjuncte cykels een permutatie van de n elementen geeft, en iedere permutatie te schrijven is als het produkt van disjuncte cykels volgt:

$\sum_{k=1}^{n} \left[{n \atop k} \right] = n!$ De som van de getallen op de n-de rij van de driehoek is dus gelijk aan n!
bv. $24 + 50 + 35 + 10 + 1 = 120 = 5!$

Rob Bosch

schiet; 'twelk zeer verwonderen zal hen, die de reden 'er van niet terstond begrypen.[4])

Daarnaast zijn er ook gewone rekenkunderaadsels, die met behulp van reken-recepten werden opgelost. Bijvoorbeeld het raadsel over de persoon die in acht maanden 1000 Gulden verteert, elke maand een zelfde bedrag meer gebruikende dan de maand ervoor (het bedrag geeft ook weer aan voor welk publiek Guyot schreef). Uiteraard kon deze persoon zich nog wel herinneren dat hij de eerste maand 20 gulden had gebruikt, en nu wil de auteur weten hoeveel er elke maand gespendeerd was. Het raadsel werd exemplarisch met behulp van een recept opgelost, zonder dat er enige vorm van algebraïsche uitleg aan te pas kwam. Hier lag concreet de grens tussen aardigheid en nadenken voor Guyot en zijn lezers. Aardig zijn ook het zogenaamde 'Tover-vierkant' en de 'Tover-ster'. Het vierkant betrof een vierkant van willekeurige maar verschillende getallen die horizontaal en verticaal opgeteld steeds dezelfde waarde opleverden. Guyot gaf een algemeen recept hoe deze vierkanten samen te stellen op basis van een gegeven som.[5]) De toversterren waren stervormig gegroepeerde getallen waarvan de som (of het product) van twee buren steeds gelijk was aan de som (of het product) van de twee aan het andere eind van de diagonaal gelegen getallen. Hiervan stonden alleen een paar voorbeelden in Guyot's boek: ze werden geconstrueerd met behulp van een rekenkundige (of meetkundige) rij.[6])
Daarnaast behandelde Guyot in dit deel een stukje combinatoriek in het tellen van anagrammen met behulp van de 'rekenkonstige driehoek' (tegenwoordig bekend als de driehoek van Pascal), diverse coderingen (o.a. voor muziekschrift) [7]) en een stukje kansrekening. Dat laatste ging concreet over de kans om met een gegeven aantal dobbelstenen een bepaald aantal ogen te werpen. Dit probleem was interessant omdat er op kermissen en in hoge kringen vaak gedobbeld werd.[8])

Newtonianisme

Zoals reeds eerder vermeld maakte Guyot in veel van zijn 'vermaaklykheden' gebruik van apparaten. De prijzen voor de benodigde apparatuur varieerden van een paar gulden voor een prisma om een regenboog in een kamer te doen verschijnen, tot honderden guldens voor kamergrote installaties voor het projecteren van mensen met behulp van spiegels. Met name de zogenaamde 'toover-doosjes' waren erg in trek. In zo'n doosje bevond zich een 'zeilsteen' (magneet), die ervoor zorgde dat een magneetnaald altijd in dezelfde stand stond als een instelbaar wiel, middels een eenvoudig radermechanisme in een dubbele bodem van het doosje. Iemand die het doosje opende zag alleen de as van het instelbare wieltje doorlopen. Dit toverdoosje werd bijvoorbeeld ook gebruikt om een geheimtaal te ontwikkelen of eenvoudige standaardberekeningen uit te voeren. Daartoe werd de wijzerplaat steeds aangepast. Guyot verzorgde zelfs een vestzak-versie.[9]) Een opmerkelijke verandering ten opzichte van de zeventiende-eeuwse recreatieve wiskunde was dat Guyot het Cartesianisme had verlaten. Guyot deed proeven, en door de benodigde apparatuur te verkopen stimuleerde hij ook dat mensen deze proeven nadeden. Zijn fysica was de experimentele fysica van Newton en Bacon (die laatste gebruikte minder voor veel mensen toch moeilijke wiskunde), en bestond niet uit Cartesiaanse gedachte-experimenten. De natuurkundige proeven waren veelal bedoeld om de mensen te doen verbaasd staan. De verwondering zou de lust tot onderzoek aansporen. Die idee leefde niet bij Guyot alleen: ook zijn lezers en recensenten vonden dat een goede zaak.[10]) Dankzij de successen van de natuurwetenschap in de stijl van Newton, die in Nederland door P. van Musschenbroeck en W.J. 's Gravesande zeer sterk vertegenwoordigd was, stond deze vorm van wetenschap in hoog aanzien. [11]) Geheel in de ontmythologiserende stijl van de Verlichting werd deze nieuwe natuurwetenschap een belangrijke drager van het cultuurideaal van de elite die haar beoefende, en die (mede met behulp van die wetenschap) trachtte de wereld naar haar hand te zetten.

Leerzame gesprekjes

De Verlichting bracht ook nieuwe visies op pedagogie met zich mee. Vooral het gedachtegoed van de Britse pedagoog John Locke vond veel waardering. Omdat de natuurwetenschap belangrijk werd gevonden, vond de elite dat de kinderen daarmee ook in contact dienden te komen. Hoe eerder de kinderen leerden zich rationeel te gedragen en naar rationele verklaringen te zoeken, des te eerder konden zij zich als Verlichte heren of dames [12]) gedragen. De natuurwetenschap was daarmee een criterium op grond waarvan de elite zich onderscheidde van de grote massa van onredelijke en bijgelovige burgers.
Voor de kinderen uit de hogere sociale klassen waren leerzame gesprekjes naar aanleiding van een aantal waarnemingen zelfs een zeer aanbevelenswaardige tijdpassering.[13]) In *Filosofie der tollen en ballen* liet de (Britse) auteur John Newbery een jonkertje zijn gehoor van leeftijdgenootjes en ouders een paar elementen uit de Newtoniaanse natuurwetenschap verklaren. Dat achtte deze jonker een heel wat betere tijdsbesteding dan het spelen van gokspelletjes of andere geestdodende spelen: status moest gebaseerd zijn op kennis.[14]) Op deze wijze had de recreatieve wiskunde

(wiskunde in de brede zin van het woord) in de Verlichting dus een tamelijk serieuze ondertoon gekregen. Voor de ouders was het nog steeds een vorm van vermaak. Of het dat voor de kinderen ook is geweest, of dat deze vorm van recreatie misschien ontaardde tot geforceerde educatie laat zich lastig onderzoeken.

Conclusies

In de achttiende eeuw veranderde het karakter van de recreatieve wiskunde ingrijpend ten opzichte van de voorgaande eeuw. Niet alleen maakte de natuurwetenschap zich losser van de wiskunde, zij werd ook niet langer op Cartesiaanse wijze bedreven. Apparatuur en proeven, en dan met name verifieerbare proeven gingen een belangrijke rol spelen. Dat Guyot zijn werkplaats voor een groot deel draaiende kon houden op basis van de verkoop van zijn vermakelijke apparaten, zegt natuurlijk al heel wat over de omvang die de recreatieve wiskunde in de achttiende eeuw had aangenomen.

Recreatieve wiskunde had tevens een serieus tintje gekregen: de verwondering over een bepaalde 'truc' diende te worden gevolgd door een zucht naar kennis die het betreffende verschijnsel van een verklaring zou voorzien. Ook de kinderen van de elite werden, naar de nieuwe pedagogische inzichten, gestimuleerd zich met name met de natuurwetenschap bezig te houden. Of men in dit opzicht echter van recreatieve bezigheden kan spreken valt zeer te betwijfelen: de heersende Verlichtingsidealen dicteerden dat in een goede opvoeding enige kennis van de natuurwetenschap en wiskunde hoorde.

Onder invloed van het Verlichtingsdenken en het succes van het Newtoniaanse natuuronderzoek beperkte de recreatieve wiskunde zich hoofdzakelijk tot de meer eenvoudige rekenkundige spelletjes. In de uitleg of constructie van de fysische vermakelijkheden werden ook wiskundige (met name meetkundige) argumenten betrokken, maar die waren zelf geen onderwerp van de verwondering. Zij illustreren wel de nauwe band die gedurende deze periode tussen wiskunde en natuurwetenschap bestond. Met name de apparaten van Guyot karakteriseren de achttiende-eeuwse elitaire 'wiskundige' vermaken.



Lecture on Matter & Motion

Noten

1 Tussen de twee en drie gulden per deel kostten de boeken. Zie de juichende recensie in: **Hedendaagsche Vaderlandsche Letteroefeningen II** (1773) dl. 1, pp. 379-381

2 *Guyot* **Nieuwe Natuur- en Wiskonstige Vermaaklykheden dl. 4** Rotterdam (1775), voorrede pp. VI-VII

3 *Guyot* dl. 1 (1771), pp. V-VI

4 *Guyot* dl. 2 (1772), p. 549

5 ibidem, pp. 94-99

6 ibidem, pp. 88-93

7 ibidem, resp. pp. 119-129 en pp. 276-296

8 ibidem, pp. 136-137 - zie met name de noot waarin gesproken wordt over een verbod op het houden van loterijen met meer dan zes dobbelstenen.

9 *Guyot* dl. 1 (1771), pp. 198-220

10 Zoals bijvoorbeeld te lezen valt in de recensie van het eerste deel van zijn werk in: **Hedendaagsche Vaderlandsche Letteroefeningen I** (1772) dl. 1, pp. 178-179

11 *K. van Berkel* **In het voetspoor van Stevin** Amsterdam (1985), pp. 77-97

12 *P.J. Buijnsters e.a.* **De hele Bibelebontse berg** Amsterdam (1989), pp. 205-216; er waren zelfs speciale natuurkundeboekjes voor jonge juffers.

13 *Willem Frijhoff* **'Van onderwijs naar opvoedend onderwijs'** in: De Achttiende Eeuw - speciaal nr. (1983), pp. 3-39

14 *J. Newbery* **Filosofie der tollen en ballen** Middelburg (1768)

Voorbereiden op de Tweede Fase - Praktische ervaringen

Peter Boonstra

Inleiding

Als LIO aan de CSG De Waezenburg in Leek heb ik een lessenserie over lineair programmeren in 5 atheneum wiskunde A geschreven, die 'past' in de Tweede Fase. Deze lessenserie is uiteindelijk in twee verschillende klassen uitgevoerd, met in totaal 25 leerlingen.
In de Tweede Fase zal aandacht gegeven moeten worden aan studievaardigheden. Als ik dat op mijzelf betrek dan beschikte ik in mijn eerste studiejaar niet over deze vaardigheden. Van de eerste colleges begreep ik weinig en ik haalde deze vakken dan ook met de nodige moeite. Makkelijker zou het gegaan zijn als ik deze colleges als student zou hebben *voorbereid*, door bijvoorbeeld alvast in het boek de stof door te nemen. Een voorbeeld van een vaardigheid die in deze lessenserie belangrijk is.

De opzet

In de lessenserie over het lineair programmeren (LP) ben ik van het boek afgestapt, omdat het boek dat wij op school gebruiken - Moderne Wiskunde - naar mijn idee niet de meest geschikte vorm heeft gekozen om de theorie achter het LP aan de leerlingen duidelijk te maken. Daarom ben ik wat de opgaven betreft teruggegaan naar de experimentele boekjes van de HEWET.
Deze opgaven heb ik samen met de studiewijzer over het LP in een boekje gezet. Dit resulteerde in een studiewijzer waarin ik een verantwoording van het onderwerp geef, de leerdoelen van het LP formuleer, een leerstofplanning en de lesorganisatie geef, tezamen met een studielastbeschrijving, studie-adviezen en de toetsing.
In de studiewijzer heb ik een verantwoording opgenomen over modelleren (zie kader 1). Daarnaast heb ik in een apart hoofdstuk achtergrondinformatie gegeven over wat LP is en waar je het toepast. Ook is hier een levensbeschrijving van George Bernhard Dantzig, de grondlegger van het LP, te vinden.
De leerdoelen betroffen natuurlijk het vakinhoudelijke gebied, maar ook op gebied van presentatie en de algemene studievaardigheden heb ik leerdoelen geformuleerd. De leerlingen moesten bijvoorbeeld een logboek bijhouden, waarin ze moesten aangeven hoeveel tijd ze aan een opgave besteed hadden. Daarnaast moesten ze aangeven welke moeilijkheden ze onderweg tegenkwamen en hoe ze dat in de toekomst dachten te voorkomen.
Om de leerlingen te laten nadenken over het hoe en waarom van een opgave liet ik de leerlingen ook opschrijven wat ze van de opdracht geleerd hadden.

KADER 1

De studiewijzer

Verantwoording

Je hebt inmiddels een aantal wiskundige modellen gezien. Zo kun je bijvoorbeeld met matrices hoeveelheden, gewichten etc. aangeven en daar makkelijk mee rekenen. Of met een sinusfunctie periodieke verschijnselen modelleren. Het is nuttig om te modelleren omdat berekeningen aan de hand van een model vaak makkelijker te doen zijn.
In het lesmateriaal zal je kennis maken met een relatief jonge methode van modelleren, het zogenaamde lineair programmeren (LP). Door allerlei voorwaarden vanuit de werkelijkheid lineair te stellen, kun je de optimale oplossing vinden van een probleem. De bedenker van deze methode, George Dantzig, deed zijn vindingen van de hand in een symposium. Toen werd de kritische opmerking geplaatst dat veel verschijnselen in de werkelijkheid juist niet lineair zijn. Maar het blijkt dat deze met een aantal lineaire formules weer te geven zijn!

De opbouw van de lessenserie

De lessenserie is opgebouwd uit zogenaamde theorielessen, zelfstandige werklessen en contactlessen (zie kader 2). In de theorielessen werd een bepaald onderwerp aan de orde gesteld. In de eerste theorieles kwam aan de orde wat LP eigenlijk is en wat je ermee kunt, een soort van 'Beroep- & Studieoriëntatie'. De twee overige theorielessen gingen over het gebruik van computerprogramma's bij LP. In de drie zelfstandige werklessen konden de leerlingen in groepen van drie of vier aan de verschillende opdrachten werken. Ikzelf liep daarbij rond als begeleider. In de drie facultatieve contactlessen gaf ik extra uitleg aan leerlingen die dat op prijs stelden. Zo kwam in een contactles bijvoorbeeld het berekenen van een hoekpunt als snijpunt van drie vakken naar voren, of het tekenen van een vlak.
In de beschrijving van de studielast (zie kader 3) geef ik een ruwe schatting van hoeveel tijd de verschillende onderdelen in beslag zullen nemen. De studie-adviezen gaan over het plannen, het zelf nakijken en het weten wanneer welk onderwerp aan bod komt. Bij de toetsing heb ik de procedure opgenomen hoe het uiteindelijke cijfer tot stand komt (zie kader 4). Het logboek, de eindopdracht en een individuele toets zijn de ingrediënten voor dit cijfer. De eindopdracht heb ik zo opgezet dat de leerlingen wel overleg moeten plegen om tot de juiste oplossing te komen.

KADER 2

De leerstofplanning

Deze lessenserie wordt opgedeeld in drie verschilende lessoorten, theorielessen (3), zelfstandige werklessen (3) en contactlessen (3). De bedoeling van de verschillende lessen staat onder didactische werkvormen en lesorganisatie vermeld.

Theorielessen:

Datum:	Onderwerpen:
	De studiewijzer en wat besliskunde en lineair programmeren is.
	1e deel: Randenwandelen, hoe doe je dit op de computer.
	1e deel: De simplexmethode op de computer.

Zelfstandige werklessen:

Datum:	Opdrachten:
	BIER OF ALE: opdracht 1 t/m 15
	TARWE OF BOERENKOOL: opdracht 16 t/m 20
	HEER BOMMEL: opdracht 21
	WERKWEEK: opdracht 22
	2e deel: COMPUTERPRAKTIKUM: opdracht 23 t/m 30
	MEDICIJNEN: opdracht 31 t/m 34
	BISTRO: opdracht 35 t/m 39
	2e deel: COMPUTERPRAKTIKUM SIMPLEX: opdracht 1 t/m 14

Contactlessen:

Datum:	Opdrachten:
	boek blz. 145/146: opdracht 9, 10 en 11
	boek blz. 150/151: opdracht 13, 18 en 21
	boek blz. 152 t/m 157: opdracht 24, 26 t/m 29, 31 en 32

Daarnaast zijn er drie lessen voor de presentaties (5 leerlingen per les) en één voor de afsluitende toets.

Ervaringen in de klas

Met deze opzet van de lessenserie in het achterhoofd heb ik van te voren nagedacht over eventuele valkuilen waar leerlingen en ikzelf in zouden kunnen trappen. Met name het uit handen geven van de controle over het leerproces was een punt dat ik in de gaten zou moeten houden.

De samenwerking binnen de groepen
Het werken van de leerlingen in groepen heeft mij in eerste instantie erg verblind. Zelden hebben leerlingen zoveel werklust getoond als in deze lessenserie, waardoor ik van de aanvankelijk geplande logboek-controles heb afgezien. Een tweetal groepen leerlingen zijn hierdoor ongemerkt achterop geraakt, door wel met de opdracht van de betreffende werkles bezig te zijn, maar niet de andere opgaven bij te werken. Deze leerlingen zijn

daardoor min of meer vastgelopen. Een oplossing van dit probleem ligt dus in het controleren van de voortgang bij zowel individuele leerlingen als ook bij groepen, door leerlingen hierop aan te spreken. Een ander aspect dat hier een rol bij kan spelen is dat ik de groepen min of meer zelf ingedeeld heb. De tafels stonden bij het begin van de les in groepen, de leerlingen gingen erachter zitten. De meeste groepen werkten goed samen, maar bij de eerder genoemde groepen is het waarschijnlijk zo dat de leerlingen niet goed met elkaar overweg konden. Toch vind ik dat leerlingen ook in dergelijke groepen moeten kunnen functioneren, omdat dit in de dagelijkse praktijk - bijvoorbeeld op de werkvloer - vaak ook het geval moet zijn.

KADER 3

Studielastbeschrijving

Hieronder volgt een overzicht van de verschillende activiteiten die je moet ondernemen teneinde deze lessenserie te voltooien. Daarbij wordt aangegeven hoeveel tijd dit ongeveer effectief in beslag zal nemen.

Opdrachten: ca. 600 minuten.
Het verwerken van de theorie gaat aan de hand van het maken van opdrachten. Daarvoor zijn 7 lessen gepland. Ongeveer 3 à 4 uur zul je in totaal thuis aan de opdrachten moeten werken.

Logboek: ca. 60 minuten.
Om de opdrachten in het logboek te verwerken zul je, verdeeld over de lessen, ongeveer een uur aan de opdracht moeten werken. Te denken valt aan het netjes maken etc.

Toets: ca. 140 minuten.
Hier kun je denken aan het nog eens doorlopen van je logboek. Hierin zijn opgenomen de 50 minuten die je krijgt om de toets te maken.

Eindopdracht: ca. 100 minuten.
Het oplossen van het probleem zal voornamelijk bestaan uit het vertalen naar de juiste doelfunctie en de beperkende voorwaarden. Je moet er rekening mee houden dat je de computer nodig hebt voor de oplossing. De uiteindelijke verslaggeving komt in je logboek te staan, samen met de andere uitgewerkte opdrachten.

Presentatie: ca. 100 minuten.
Je krijgt ongeveer 5 minuten spreektijd met een aansluitende discussie. Dit moet natuurlijk wel voorbereid worden.

In totaal ben je dus ongeveer 1000 minuten, dat zijn ongeveer 17 uren met dit onderwerp effectief bezig. Daar zijn bij inbegrepen 13 lesuren (650 minuten). Normaal staat voor een dergelijk onderwerp ook een tijd van 1000 minuten.

De computerpractica
Tijdens het maken van het computerpracticum moesten de leerlingen bij een veertiental contextopgaven het LP-model opstellen. Met behulp van de computer konden de leerlingen dit model dan oplossen en controleren. Het mes sneed aan twee kanten: enerzijds deed men ervaring op met het werken met het programma - nodig voor het oplossen van de eindopdracht - anderzijds werd het vertalen van de context naar doelfunctie en beperkingen geoefend. Het leereffect is hierdoor groter dan in ‘normale’ lessituaties, want dan is het vrijwel onmogelijk 14 contexten te behandelen en te controleren.

De eindopdracht
Bij het werken aan de eindopdracht werd er hier en daar geklaagd over de moeilijkheidsgraad, met name in de genoemde groepen waar de samenwerking niet helemaal goed verliep. In reguliere lessen geven met name de zwakke leerlingen de moed al snel op als er een lastige opgave gemaakt moet worden. Deze leerlingen beseffen helaas te weinig dat er een leereffect op de lange termijn optreedt bij het werken aan dergelijke opdrachten, ook al wordt de eindoplossing niet gevonden. Doordat leerlingen in groepen aan deze eindopdracht werken, is er de mogelijkheid tot overleg in elke fase van het oplossingsproces. De eindopdracht is naar mijn mening daardoor wel degelijk een geschikte opdracht, omdat er juist overlegd moet worden!
Kortom: een groot leereffect wordt bereikt door leerlingen in groepen te laten werken. Leerlingen leggen aan elkaar uit en helpen elkaar op elk gewenst moment. Als het echt lastig wordt is er nog altijd een leraar aanwezig. Belangrijk is echter, als leerlingen niet gewend zijn in groepen te werken, dit te begeleiden en controleren, door zo nu en

dan het groepsproces centraal te stellen.
Dit bleek uit de resultaten van de eindtoets. Met name de leerlingen die tijdens het groepswerk het voortouw genomen hadden scoorden zeer goed (90-100%). Daarentegen scoorden de zwakkere leerlingen in de niet goed samenwerkende groepen op de eindtoets matig (45-55%). Degene die een medeleerling helpt door iets uit te leggen leert daar zelf kennelijk het meeste van.

De mening van de leerlingen

Om er achter te komen wat de leerlingen van de lesopzet vonden, heb ik een enquête afgenomen. Hierin konden leerlingen aangeven hoe ze over de verschillende aspecten, zoals de studiewijzer, de computerpractica, het groepswerk, logboek, eindopdracht etcetera, van de lessenserie dachten. Hieronder geef ik de algemene gedachte van de leerlingen per punt weer.

De studiewijzer
De studiewijzer vonden de leerlingen over het algemeen duidelijk en handig, omdat er de mogelijkheid is tot het zelf indelen van de tijd en het maken van een planning. Een leerling merkte het volgende op: ‘Ik vind de studiewijzer handig, omdat je op de ene dag wat meer kunt doen zodat je de volgende dag iets minder hoeft te doen en die tijd aan een ander vak kunt besteden. Je deelt op deze manier zelf je huiswerk in!’

De zelfstandige werklessen
Deze werden unaniem als plezierig en goed beoordeeld. Vooral omdat het meeste werk op school af is en er dus thuis geen huiswerk is. Daarnaast werd opgemerkt dat het werken in de les ontspannen is, omdat je niet de gehele les door geconcentreerd naar de docent hoeft te luisteren.
Een leerling merkte op dat je dit in principe ook thuis kon doen en dan niet naar school hoefde te gaan…

De contactlessen
De contactlessen werden als goed beoordeeld, zowel inhoudelijk als de mogelijkheid om niet bij deze lessen aanwezig te zijn. De uitleg werd als zeer goed en duidelijk ervaren ... (ahum). Een leerling ging naar deze contactlessen toe om mij de mogelijkheid te ontnemen om bij een eventueel slecht cijfer hier op te wijzen…

KADER 4

Toetsing

Het totaalcijfer wordt bepaald door de volgende onderwerpen, waarbij aangegeven is hoeveel punten van het cijfer er door bepaald worden:

* Het logboek (2 punten)
* De presentatie (2 punten)
* De toets (6 punten)

Dit levert je uiteindelijke cijfer op. Daarbij is het verplicht dat het logboek van voldoende kwaliteit is, zie de volgende eisen.
In het logboek moeten de volgende zaken vermeld worden:

- de uitwerkingen van de opdrachten, inclusief eindopdracht. De opdrachten uit het boek zijn facultatief.
- de bestede tijd aan de opdracht (b.v. BIER OF ALE: 1 uur).
- de ondervonden moeilijkheden met een beschrijving van de uiteindelijke oplossingsstrategie.
- het formuleren van je voornemens om de moeilijkheden in de toekomst te vermijden.
- het formuleren van wat je van de opdracht geleerd hebt.

De computerpractica
Over het algemeen werd dit aspect als zeer positief ervaren, de afwisseling om ook eens wiskunde in een andere situatie te doen werd vaak genoemd. Opmerkelijk, want de gebruikte programma’s LinProg en SIMOPT blinken mijns inziens niet uit door hun originaliteit.
De hoeveelheid opgaven werd als belastend ervaren, zoals een leerling heel goed wist te verwoorden: ‘Zelfs al had je thuis het practicum voorbereid, dan had je het nog niet in je eentje af kunnen krijgen. Dus je ruilt opdrachten uit, met als gevolg dat je geen idee hebt waar het over gaat. Maar goed, je hebt de antwoorden. Als iemand je het uitlegt is het heel logisch, maar daar gaat het niet om. Je moet het zelf doen. Dus zulke opdrachten zijn wel goed, je moet er alleen niet te veel hebben.’

Het groepswerk
Dit werd verschillend beoordeeld, de meerderheid was hier niet gelukkig mee (ca. 20% was tevreden, 50% was neutraal en 30% gaf te kennen liever niet in een dergelij-

ke vorm te willen werken). De mogelijkheid tot overleg en taakverdeling werden vaak als positieve punten genoemd, maar daarentegen werd de afhankelijkheid van de medegroepsleden als belastend ervaren.
Een leerling merkte het volgende op: ‘Het werken in een groep viel tegen. Ik voelde me net de leraar doordat ik alsmaar aan het uitleggen was. En daarvoor ga ik niet naar school. Het werken in groepen was verder wel gezellig.’

Het logboek
Dat er een logboek bijgehouden moest worden vonden de leerlingen unaniem niet nodig. Dit kwam ook duidelijk terug in de reacties van leerlingen:
‘Logboek: onnodig, en het kost alleen extra tijd. Je moest vaak al zo veel doen voor de volgende les, dat je te weinig tijd had ook nog eens alles netjes op te schrijven. En dat je eronder moest zetten wat je geleerd hebt is helemaal onzinnig!’
‘Logboek: aan de ene kant absolute onzin, want waarom zou ik mijn schrift in moeten leveren. Als ik een opdracht niet heb, is dat mijn eigen verantwoordelijkheid. Nu kost je dat punten. Je zorgt dat alles piekfijn in orde is, dus als je alles in het net schrijft, leer je ook tegelijk. Dat is een voordeel.’
‘Je leert er meer van dan alleen opdrachten maken. Je bent er wel lang mee bezig!’
‘Het logboek is nogal onzinnig. Vaak moest ik nadenken hoelang ik er mee bezig was geweest, want dat was ik alweer vergeten...’
‘Het maakt weinig verschil of je nu wel of geen logboek bijhoudt, voor een proefwerk kijk je naar de gemaakte sommen en niet naar de aantekening van ‘dit heb ik geleerd’ en ‘ik ben er … min. mee bezig geweest’. Wellicht is een logboek iets netter dan een gewoon schrift.’
Toch is het naar mijn mening belangrijk dat leerlingen op een of andere manier reflecteren over de gemaakte sommen. Uit de resultaten van de toets blijkt zeer duidelijk dat de leerlingen die een kwalitatief goed logboek hadden ingeleverd, beter scoorden dan andere.

De eindopdracht
Deze werd over het algemeen als pittig beschouwd. De scores op deze eindopdracht waren overigens allemaal voldoende, ook al omdat je ze in en met een groepje kon maken. Bovendien vond ik dat ik mocht proberen een opdracht te vragen waar leerlingen hun tanden ik konden zetten. Je kon ook (delen van) de oplossing kopen door punten in te leveren, zodat de andere groepsleden hier baat bij konden hebben. Waarschijnlijk is dat uit solidariteitsoverwegingen niet gedaan.

Conclusies

Het werken in groepen is plezierig voor zowel leraar al leerlingen. De rol van de leraar verschuift van degene die uitlegt tot begeleider van leerlingen. Met name dit laatste maakt het mogelijk tot het opbouwen van een contact met de leerlingen, dat in de normale situatie niet mogelijk is. Mij spreekt dit in het bijzonder aan.
Veel aandacht moet uitgaan naar het begeleiden van het groepsproces en het leren leren en reflecteren. Dit zijn leerlingen niet gewend en voordat dit vlekkeloos zal verlopen, moet er de nodige aandacht aan gegeven zijn.
Daarnaast moeten met name de zwakke leerlingen goed in de gaten gehouden worden, wat het leerproces betreft. Deze leerlingen dreigen snel het overzicht te verliezen en hebben in een situatie waar meer discipline van ze geëist wordt, geen houvast. Een duidelijke structuur die in de normale situatie juist aangeboden wordt, moeten deze leerlingen nu voor zichzelf vinden. Een leerproces dat met vallen en opstaan gepaard kan gaan, maar daarom niet minder belangrijk. Leerlingen die deze verantwoordelijkheid wel aan kunnen scoren beter en leren meer. Met name de leerling die uitleg geeft aan andere leerlingen is op een niveau gekomen waar hij of zij over de stof heen getild is en op een andere manier moet spreken om begrippen en vaardigheden duidelijk te kunnen maken. Deze leerlingen, vrijwel de grootste groep, boeken meer leerwinst dan in een normale lessituatie. Dan zijn er leerlingen die zich in het groepswerk proberen te drukken. Maar zij falen bij het maken van de individuele eindtoets.

Literatuur

PMVO
Studiewijzers: de spoorboekjes voorbij
Den Haag (1997)

HEWET
Lineair Programmeren
Fi, Utrecht (1983)

Praktische opdrachten als een vorm van onderzoekend leren

Ebo M. Koerts

Inleiding

Het inpassen van onderzoeksopdrachten in het wiskundeonderwijs is voor de meeste docenten een nieuw verschijnsel.
Hoewel er een toenemende aandacht voor dergelijke opdrachten, meestal *praktische opdrachten* genoemd, te bespeuren valt, is de zorg over hoe dit allemaal moet niet afgenomen. Bezig zijn met die zorg kan bezorgdheid bestrijden en het lesgeven zelfs veraangenamen.
In dit artikel wil ik bezig zijn met die zorg door de vraag aan de orde te stellen of praktische opdrachten een rol in het onderwijs moeten spelen en zo ja, hoe dat dan kan.

Aandacht voor praktische opdrachten

Dat er een toenemende aandacht voor praktische opdrachten is, blijkt onder andere uit de examenprogramma's, bijeenkomsten van de NVvW en artikelen in de vakbladen.
Praktische opdrachten gaan een belangrijke rol spelen in de examenprogramma's. In de herziene kerndoelen voor de basisvorming is sprake van 'het ontwikkelen van onderzoeks-strategieën om problemen aan te pakken' en het inzetten van de computer bij 'het oplossen van problemen waarbij verbanden tussen twee variabelen een rol spelen.'
In het kader van het schoolonderzoek vbo/mavo wordt in het examenprogramma sterk aanbevolen te werken aan praktische opdrachten.
In het kerndeel van het vak wiskunde voor de leerwegen is als exameneenheid opgenomen: Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten. Deze GWA waren al een nieuw element van het programma Wiskunde 12-16.
Voor de Tweede Fase wordt het cijfer van het schoolexamen voor een deel (voorlopig 40%) bepaald door de resultaten van praktische opdrachten.
Deze aandacht voor praktische opdrachten werd onderstreept tijdens de regionale bijeenkomsten van de NVvW. Douwe Kok en Kees Hoogland gaven onder andere boeiende voorbeelden waaruit bleek dat wiskundeleraren door de eeuwen heen hun leerlingen hebben uitgedaagd 'de wondere wereld wiskundig te onderzoeken' [1]). Van het (nieuwe) wiskundeonderwijs wordt verwacht dat er doelgericht gewerkt wordt aan het verwerven van een onderzoeksgerichte houding.
Ook in de tijdschriften wordt veel aandacht aan praktische opdrachten geschonken. Dit artikel is er een voorbeeld van. Er is dus een toenemende aandacht voor praktische opdrachten. Dit wil echter nog niet zeggen dat er geen zorg is hoe het werken aan dergelijke taken gestalte moet krijgen.

Onderzoekend leren

De vraag hoe praktische opdrachten in het wiskundeonderwijs ingepast kunnen worden, kan worden besproken door praktische opdrachten op te vatten als een vorm van *onderzoekend leren.*
Deze stellingname kan worden begrepen vanuit mijn visie op zelfstandig leren. Bij het verwerven van een onderzoeksgerichte houding spelen praktische opdrachten een belangrijke rol. Een beknopte uitwerking van dit standpunt is hier op zijn plaats, maar eerst geef ik een voorbeeld uit mijn klaspraktijk in 4 vwo.

Onderzoekend leren in de klas

Door de uitbreiding van het kabelnet kunnen in een woonwijk meer televisiezenders worden ontvangen. De inkomsten uit abonnementen op het net moeten dan wel worden verhoogd. Op het ogenblik betaalt een abonnee tien gulden per maand. Er zijn 10.000 huizen aangesloten. Verwacht wordt dat elke gulden prijsverhoging van het abonnement 500 bedankjes zal opleveren. Bij welke prijs per

maand is het binnenkomende bedrag aan abonnementsgeld het grootst?

Dit (of een soortgelijk) vraagstuk staat centraal in vier maanden onderwijs in klas 4 vwo. In het gebruikte schoolboek staat het aan het eind van het vierde hoofdstuk. Ik zet het neer aan het begin van het schooljaar.
Het probleem wordt aan het begin van het schooljaar individueel en in groepjes *verkend.* Er worden manieren van aanpak bedacht en hier en daar wordt een antwoord bedacht. Mijn enige tegenwerping is: jullie hebben zo lang gewonnen, totdat een ander met een hoger bedrag uit de bus komt.
Daarna geef ik enkele college-achtige lessen om de *voorkennis* op een rijtje te zetten. Wat is een functie? Wat betekenen die letters in het functievoorschrift? Hoe maak je de sprong van rekenen naar tekenen?
Vervolgens *analyseren* we het probleem. Niet naar oplossing, maar naar soort kennis. Gestuurd wordt op aansluiting met de kennis uit de derde klas. We *sorteren* naar eerstegraads- en tweedegraads-functies. De vraag komt op wat we daarvan moeten weten. Het antwoord achterhalen we door *gericht* in het boek te *zoeken*, in plaats van het maken van alle sommen.
Ik geef aan dat het verschil tussen klas 3 en klas 4 moet zijn dat de aanpak van de oplossing ‘generaliseerbaar’ moet zijn. Met name *stuur* ik bij de vraag naar het hoogste punt van een grafiek. Het begrip hellingfunctie wordt geboren. Daarna kan de computer het werk van mij overnemen en komen we een stapje dichter bij de *zelfsturende leerling.* Al die handmatige limietberekeningen worden overbodig, je kunt onmiddellijk inzoomen op kleine intervallen en op het scherm zien wat er gebeurt.
Met deze aanpak kan ik oud worden: het differentiëren (de rekenregels) hoefde ik nauwelijks uit te leggen. Het kwam er op neer dat ik vijf minuutjes aan het woord was en de rest van de tijd werd al *onderzoekend* achter de computer doorgebracht. Daarbij drong ik aan op het opschrijven van een afrondende conclusie (= het resultaat van wat ontdekt is).
Al met al is in vier maanden tijd een *actieve expeditietocht* voltooid langs de weg van functievoorschriften, grafieken, differentiëren en het oplossen van praktische problemen.

Achtergronden bij deze aanpak

Een kenmerk van de aanpak in het bovenbeschreven voorbeeld is de volgorde. Het probleem staat centraal, niet de theorie. Niet het maken van (veel) sommen staat centraal, maar het oplossen van problemen. Vanuit de toepassing wordt de theorie besproken.
Maar er is nog een belangrijk kenmerk. Het boek wordt eigenlijk als een *leesprobleem* opgevat.

Begrijpend lezen

Het lezen om te studeren kan als een probleemoplossingsproces worden gezien. Bij het lezen van bijvoorbeeld een wiskundig vraagstuk wordt de leerling geconfronteerd met onbekende informatie. Daarbij moet een ‘probleem’ worden opgelost. Het probleem is het ‘begrijpen’ van de boodschap van de auteur van die tekst [2]). Het begrijpen kan betrekking hebben op een aantal tekstinhoudelijke niveaus, van woordniveau tot het idee achter de tekst.
Op elk niveau gaat het bij het lezen om het ontsleutelen van een code. Bij het distilleren van de ‘boodschap’ van de auteur is er sprake van een soort conversatie tussen lezer en tekst. Bij het lezen van een opgave, een stukje uitleg of een context ontstaat op zeker ogenblik een hypothese omtrent de boodschap. Gedurende het verdere verloop van het leesproces wordt informatie getoetst aan deze hypothese. Het is een progressieve verfijning van hypothese-vorming geworden. Dit verfijningsproces wordt beëindigd, zodra voldaan is aan een interne standaard, aan wat verwacht wordt aan zinvolheid te ervaren [3]).
Lezen is dus een doelgericht proces. Het doel is: begrijpen.
Lezen is ook een constructief proces. Dit kan als volgt worden toegelicht. Wanneer een leerling zich bij het lezen van een opgave afvraagt welke vraag er gesteld zou kunnen worden, activeert hij zijn wiskundige kennis.
Wanneer een leerling zich bij het lezen van een tekst bijvoorbeeld halverwege de tekst afvraagt hoe het verhaal zal aflopen, dan gebruikt hij zijn (voor)kennis om zich daarover een idee te vormen. Het vervolgens voortdurend toetsen en eventueel bijstellen van dit idee verhoogt de concentratie waarmee gelezen wordt. De tekst wordt zo diepgaander verwerkt en daardoor ook beter begrepen en onthouden.
Het in 4 vwo gebruikte boek (zie het voorbeeld boven) vat ik op als een grote tekst. De samenvatting ervan is niet de theorie, niet een lijstje-kennen-en-kunnen, maar een vraagstuk uit hoofdstuk 4. Al construerend beginnen we de boodschap van dit vraagstuk te begrijpen. De stappen voor die constructie blijken achtereenvolgens in hoofdstuk 1, 3 en 2 van het boek te staan: eerstegraads functies, tweedegraads functies, differentiëren.
De ‘leesopdracht’ wordt niet overgeslagen. Pas na de lees-opdracht

volgt de wiskunde-opdracht: het vinden van de maximale winst. Sterker nog: het op een wiskundig elegante en efficiënte manier zoeken naar dat antwoord, de systematische probleemaanpak vervangt niet het onderzoekend lezen, komt er niet voor, maar na.
Het boek zelf is hiermee als een praktische opdracht behandeld.

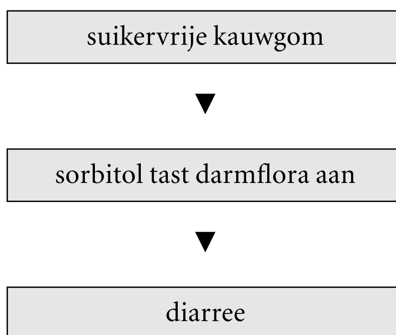
Actief lezen

De aan te reiken informatie (de wiskundige theorie) wordt op de in het voorbeeld beschreven wijze op een actieve manier verworven. Daar vroeg Van Dormolen al in 1982 aandacht voor [4]). Hij was van mening dat de vakleraar aandacht moet besteden aan het leren omgaan met teksten uit dat vak. Op dat spoor ben ik verder gegaan in mijn dissertatie [5]).
Zelfs studenten lezen teksten vaak op een niet-actieve manier. Ze worstelen er zich dan doorheen als door een hoop zand [6]). Welke wiskundedocent herkent hierin niet de benadering van veel leerlingen van sommen? Ze maken die en dat is het dan. Ze vragen zich niet af wat ze geleerd hebben. Elke som staat los van de vorige en de volgende. Ze zien een serie vraagstukken vaak als 'los zand'. Ze zien geen samenhang. Laat staan dat ze samenhang zien tussen opeenvolgende hoofdstukken uit het boek, wat zoals beschreven in 4 vwo wel noodzakelijk is.
Dat verschijnsel doet zich al voor op de basisschool. Op de basisschool zijn de leerlingen er primair op gericht de informatie in de tekst zo letterlijk mogelijk op te nemen, zonder op deze informatie veel bewerkingen uit te voeren [7]).
Maar daar gaat het nu juist wel om. Anders schiet het in de wiskundeles niet op. Wat moet je bijvoorbeeld beginnen wanneer een leerling geen oorzaak-gevolg relatie herkent?
Uit eigen onderzoek is naar voren gekomen dat leerlingen uit de brugklas veel moeite hebben met bijvoorbeeld het opsporen en na oefening correct noteren van een oorzaak-gevolg relatie [5]).

Een voorbeeld kan dit verduidelijken.
In een vragenrubriek in een tijdschrift staat een vraag van een lezeres die op dieet staat en wil weten wat de gevolgen van het eten van suikervrije kauwgom zijn.
De redactie antwoordt dat ze niet meer dan een half pakje per dag moet eten, want:

'Sorbitol tast de natuurlijke darmflora aan en als je zo verschrikkelijk veel suikervrije kauwgom eet, kunnen je darmen niet meer naar behoren functioneren. Daarom heb je ook zo'n last van diarree.'

In dit antwoord zit een oorzaak-gevolg relatie.
Schematisch zou deze als volgt kunnen worden weergegeven:



Het herkennen van relaties is een vaardigheid die blijkbaar moeizaam verworven wordt, maar onmisbaar is voor de wiskundeles. Hoe kun je opdrachten maken als je de structuur van de tekst waarin de opdracht verpakt zit niet door hebt?
Hoe kun je wiskunde leren zonder besef te hebben van verbanden?
In dat geval zullen leerlingen het leren opvatten als een plicht om informatie in het hoofd te stampen voor een repetitie om die daarna weer te vergeten. In dat geval zullen leerlingen zich voortslepen van proefwerk naar proefwerk. In dat geval kunnen we niet veel activiteit verwachten.

Actief leren

Een actieve rol van leerlingen is niet alleen nodig bij het lezen, maar ook bij het leren. Zeker als je met het onderwijs meer wilt bereiken dan reproductie. Wanneer leerlingen niet zelf actief zijn, gaat het met het leren van wiskunde net eender als met het lezen van de kinderen van de basisschool. De sommen worden net als de leesteksten ervaren als 'los zand'. Op school stamp je die zo goed mogelijk in je hoofd voor een repetitie. Er is pas sprake van leren zodra de leerling zelf actief met de aangereikte informatie bezig is.
We willen meer bereiken dan dat hij de leerstof aanneemt. We willen laten *onderzoeken*, analyseren, problemen oplossen, nadenken, verdiepen. In het kader van modern universitair onderwijs bepaalt nieuwsgierigheid het verschil tussen aannemen en onderzoeken. Nieuwsgierigheid ontstaat door verstoring van het evenwicht tussen wat men ziet en wat men weet, en ze ontstaat daaruit wanneer zo'n verstoring wordt aanvaard in plaats van ontvlucht [8]).
Dezelfde drang die het kind doet kruipen om de dingen van dichtbij te onderzoeken bepaalt ook dat de student zoekt naar de problemen die hij tegenkomt. Het onderwijs zou zo moeten worden ingericht dat het problemen maakt, het evenwicht verstoort, nieuwsgierig maakt en de ruimte biedt om oplossingen te zoeken [9]).
Voorkomen moet worden dat in de praktijk een situatie ontstaat waarbij het alleen de docent is die uitlegt, toelicht, voorbeelden geeft, demonstreert, instrueert, verban-

den legt en conclusies trekt. Deze doceeractiviteiten stimuleren namelijk de leerlingen niet om zelf actief te zijn en initiatieven te nemen.

Onderzoekende houding

Om zelf actief om te gaan met kennis moet de leerling deze bijvoorbeeld in verband brengen met wat hij al van het onderwerp afweet, zelf analyseren hoe de dingen werken of in elkaar zitten en zelf probleemoplossend te werk gaan, indien hij met een probleem wordt geconfronteerd.
In de beschreven aanpak in 4 vwo was het de docent die leerde constructief te lezen, de problemen te analyseren op voorkennis en systematisch op te lossen. Onderzoekend leren vormde de leidraad voor het leerproces van een heel semester.

Uiteindelijk moet de leerling zelf onderzoekend leren. Hij moet zelf vaststellen wat de bedoeling is. Vervolgens zal hij de opdracht zelf moeten analyseren en op basis daarvan een plan van aanpak moeten ontwikkelen. Hij zal bij zichzelf moeten nagaan in hoeverre hij op eigen kracht kan werken of extra informatie of hulp nodig heeft. Dit houdt in dat hij informatie moet kunnen zoeken, selecteren en verwerken, hetgeen er weer op neer komt dat hij moet kunnen omgaan met informatiezoeksystemen. In feite gaat het om ‘kennisnavigatie’ [10]).

Om dit te leren moeten we leerlingen vanaf de brugklas helpen hun doel te verleggen van stampen naar begrijpen. Deze verschuiving heeft zowel betrekking op het lezen als op het leren van de theorie en het maken van opgaven. *Onderzoekend leren* begint bij onderzoekend lezen. Dat kan beoefend worden met praktische opdrachten.
Maar onderzoekend leren is meer. Weliswaar is het (leren) uitvoeren van opdrachten belangrijk, maar dat gebeurt ook bij het zelfstandig maken van sommen uit het boek. Daar moet het echter niet bij blijven.
Praktische opdrachten leiden tot resultaten, tot producten. Al doende wordt bevorderd dat er doelgericht wordt gewerkt, maar toch is dit niet voldoende.
We willen meer. We willen leerlingen ‘dwingen’ samenhang te ontdekken, verbanden te zien door te doen. De versnipperde wiskundige kennis moet in elkaar worden geschoven. Op andere vakgebieden gebeurt dit al lang, bijvoorbeeld bij de technische vakken en de beeldende vakken. Met praktische opdrachten kunnen we vaardigheden integreren.
We willen echter nog meer. Doelgericht zelfstandig werken, leren door doen, vaardigheden verwerven en die integreren zijn misschien al bijna onbereikbare idealen en desondanks komt er nog iets bij. Het gaat namelijk niet alleen om het uitvoeren van meer of minder gesloten opdrachten van praktische aard. Het gaat niet alleen om een inhoud met een toegepast karakter. Het gaat om opdrachten die een onderzoekende houding bevorderen.

Samenvattend gesteld begint onderzoekend leren bij onderzoekend lezen, gevolgd door actief lezen en actief leren door te doen, namelijk door met een onderzoekende houding aan praktische opdrachten te werken.
Het toenemende belang hiervan wordt duidelijker als we de Tweede Fase erbij betrekken en de nieuwe examens voor mavo en vbo.

In het kader van de Tweede Fase en de nieuwe examens vbo/mavo

In de Tweede Fase vormen praktische opdrachten een verplicht onderdeel van het schoolexamen. Het zou jammer zijn als dit als een nieuwe last wordt ervaren of als een taakverzwaring wordt gevoeld. In dit artikel wordt betoogd dat het niet om een uitbreiding van de lestaak moet gaan of om nog meer leerstof zonder meer studielasturen, maar om vervanging, om een andere inrichting van de leeromgeving.
De beschreven aanpak in 4 vwo leidt in minder tijd met minder energie en meer plezier tot meer begrip en meer resultaat.
Bij wiskunde in de Tweede Fase en het doen van praktische opdrachten moet het gaan om onderzoekend leren. Het gaat er niet om dat leerlingen zelf het wiel moeten uitvinden. Het gaat er evenmin om het bespreken van theorie af te zweren of het bord de klas uit te doen. De Tweede Fase wordt niet (alleen) zichtbaar door leerlingen aan het Internet te zetten of de tafels en stoelen anders te plaatsen. Het gaat om wat er ‘tussen de oren’ gebeurt. Het gaat om het inrichten van het wiskundeonderwijs als een omgeving waar onderzoekend wordt geleerd.
Elementen daarvan zijn: soms zelfstandig werken, altijd actief lezen en leren, soms klassikaal bezig zijn met problemen en reacties van leerlingen oproepen, soms groepsgewijs of individueel aan problemen werken, soms wiskunde ontwikkelen in een volgens Lakatos voortdurende dialoog van bewijzen en weerleggen [1]), vaak aan praktische opdrachten werken, altijd een onderzoekende houding bevorderen.
Het belang van het inrichten van het wiskundeonderwijs als een omgeving waar onderzoekend

wordt geleerd, wordt dus niet alleen ingegeven om het onderwijs in 4 vwo effectiever te maken, maar ook om de examenresultaten te verbeteren. Zien we de praktische opdrachten alleen als 'onderdeel' van het examen dan doen we ons zelf te kort. Neem de nieuwe examens van vbo en mavo. Die lijken niet meer op de oude multiple-choice toetsen. Deze verandering vraagt om een andere leeromgeving. De onderzoekend lerende leerling zal weinig moeite hebben met de nieuwe examenopgaven.
Onderzoekend leren is dus in het belang van de leerling en de school. Daarnaast is er ook een breder maatschappelijk belang. Dit maatschappelijk belang wordt onmiddellijk zichtbaar in het 'aansluitingsprobleem'. De universiteit, het hbo en het mbo klagen over het gebrek aan vaardigheden van aankomende studenten, niet over hun gebrek aan kennis. Met al hun kennis kunnen de pas geslaagden van vbo, mavo, havo of vwo plotseling niet uit de voeten in het vervolgonderwijs.
Met het doen van praktische opdrachten nemen de vaardigheden wel toe, leren ze wel verbanden te zien, wordt de kennis wel geïntegreerd en toegepast in nieuwe situaties zoals een andere leraar, een ander vak, het vervolgonderwijs.

Besluit

Er is een toenemende aandacht voor het verschijnsel dat onderzoeksopdrachten in het wiskundeonderwijs moeten worden ingepast. Het belang hiervan wordt ingegeven door een drietal behoeften, te weten: meer effectief onderwijs, meer zelfstandigheid bij leerlingen, minder aansluitingsproblemen.
De bezorgde vraag hoe dit moet, kan worden beantwoord door praktische opdrachten te verstrekken, opgevat als een vorm van onderzoekend leren. In dit artikel is een voorbeeld in 4 vwo geschetst. Daarna zijn kenmerken van onderzoekend leren besproken, zoals: begrijpend lezen, actief lezen, actief leren en een onderzoekende houding.
De conclusie luidt dat wanneer het wiskundeonderwijs in toenemende mate wordt ingericht als een omgeving waar onderzoekend wordt geleerd, het bedenken van praktische opdrachten en het inpassen ervan in het onderwijs steeds beter zal lukken.
Vanaf de brugklas begint het onderzoekend lezen: analyseren, structureren, verbanden leggen. Vanaf de brugklas begint ook het onderzoekend leren: geïntegreerde wiskundige activiteiten. Al doende wordt dit geleerd, eerst onder leiding van de docent, later steeds meer zelfstandig. Gaandeweg verschuift ook de inhoud van de opdrachten. Van meer of minder gesloten opdrachten gaat het van achteraf toepassen van de theorie naar vervanging van de klassikale instructie of het leerboek. De praktische opdrachten zullen naarmate de leerlingen ouder worden een probleemstelling krijgen die het onderzoekend leren bevordert.
Als het wiskundeonderwijs in toenemende mate wordt ingericht als een omgeving waar onderzoekend wordt geleerd, zullen praktische opdrachten minder zorgen baren.

Literatuur

7 *Boonman, J.H., & Kok, W.A.M.*
Kennis verwerven uit teksten
Academisch Proefschrift
Utrecht: Rijksuniversiteit (1986)

4 *Dormolen, J. van*
Aandachtspunten: een a priori analyse van leerteksten voor wiskunde bij het voortgezet onderwijs
Academisch proefschrift
Utrecht: Rijks Universiteit (1982)

8 *Frijda, N.H.*
Heeft de psychologie zin?
Nederlands Tijdschrift voor de Psychologie, 47, 177-185 (1992)

2 *Harri-Augstein, S., Smith, M., & Thomas, L.*
Reading to Learn
London: Methuen (1982)

9 *Klerk, L.F.W. de*
De moderne academicus
Rede Dies Natalis Katholieke Universiteit Brabant
Tilburg: Tilburg University Press (1992)

10 *Klerk, L.F.W. de*
JongLeren met Kennis
Rede Dies Natalis Katholieke Universiteit Brabant
Tilburg: Tilburg University Press (1997)

5 *Koerts, E.M.*
De ondernemende leerling
Academisch proefschrift
Rijswijk: Uitgeverij Début (1995)

1 *Kok, D. & Hoogland, K.*
Praktische opdrachten, tussen droom en daad
Nieuwe Wiskrant 17-4, p. 4-10 (1998)

6 *Mirande, M.J.A.*
Studeren door schematiseren
Utrecht: Het Spectrum (1981)

3 *Oakhill, J., & Garnham, A.*
Becoming a skilled reader
Oxford: Basil Blackwell (1988)

Van de bestuurstafel

Nu ik tot het hogere ben geraakt zou deze rubriek ook 'van de voorzitter' kunnen heten, maar dat zou geen recht doen aan het feit dat -gelukkig!- in onze vereniging het bestuur meer is dan de voorzitter en de vereniging meer dan het bestuur. Uw kennis van de transitieve eigenschap maakt een conclusie mijnerzijds hier overbodig, we houden het zoals het is.

Wiskunde B1,2 vwo
Op advies van een werkgroep, waarin ook de NVvW vertegenwoordigd was, is door het ministerie van OC en W besloten om het programma voor deze beide vakken in elk geval voorlopig wat in te krimpen. Hierdoor komt er wat ruimte om te leren werken met het nieuwe programma. De precieze informatie vindt u elders in dit nummer. Het ligt overigens in de bedoeling om de examenprogramma's van alle vakken periodiek nader onder de loep te nemen en te zien of bijstelling nodig is. De tijd dat een examenprogramma (economie, wiskunde 1 resp B) zo'n twintig jaar mee kon ligt achter ons.

SLO-ICT
Het SLO-project over de invulling van het gebruik van ICT in de Tweede Fase van havo/vwo zal zich in de nog resterende tijd richten op het gebruik van spreadsheets.

Vacature
Het bestuur heeft besloten om de vacature die ontstaan is vanwege het vertrek van Ruud Jongeling voorlopig niet op te vullen. Het is in de korte termijn die we hadden niet gelukt geschikte kandidaten te vinden. Wellicht dat dit jaar uit de werkgroep mavo/vbo geschikte kandidaten naar voren komen.

Pythagoras
De vereniging heeft bijgedragen aan de klassenprijs van de Escherprijsvraag die door het blad Pythagoras was uitgeschreven. Op 26 november is de prijsuitreiking door onze dan net exvoorzitter, die als voorzitter van de jury mede de taak had de fraaie inzendingen te beoordelen.

Lustrum
Opdat u het niet vergete: 2000 wordt een bijzonder jaar voor wiskundig Nederland (en anderen, als het aan de lustrumcommissie ligt.....) De voorbereidingen vorderen gestaag, de plannen krijgen steeds meer vorm.

Symbolische rekenmachine/ computeralgebra
De aanbevelingen in het rapport van de werkgroep (zie elders in dit nummer) zijn door het bestuur in algemene zin overgenomen. Wel zouden we in het experiment een tijdstip willen vaststellen waarop besloten wordt over al dan niet landelijk invoeren. En het aantal van slechts twee scholen om mee te beginnen vinden we te klein.
In een brief aan het ministerie heeft het bestuur gevraagd om een experiment, zoals in het rapport genoemd wordt, mogelijk te maken.
We wachten een reactie af.

Website
De website is er, en het is een mooie. Om een verder bestaan financieel mogelijk te maken hebben we subsidie aangevraagd bij het ministerie, vanuit de gedachte dat dit initiatief prima past in de doelstellingen van het Kennisnet. Ook hiervan zijn we in afwachting van een reactie.

Dag van de leraar
Het dreigend lerarentekort heeft ons in de ogen van velen weer een stuk interessanter gemaakt. Een gunstige ontwikkeling, want het is heel jammer dat ons in wezen toch zo fraaie en nuttige beroep door allerlei vervelende randvoorwaarden zo onaantrekkelijk is geworden, dat je nog slechts enkelen bereid vindt om leraar te worden.
Naast veel geld voor de noodzakelijke verbetering van arbeidsvoorwaarden zoals verlaging van de werkdruk, verkleining van de klassen en vermindering van het maximum aantal lessen kan de beeldvorming rond het beroep van leraar ook wel een opwaardering gebruiken. Het CPS (Christelijk Pedagogisch Studiecentrum) heeft daarom het initiatief genomen om te komen tot de verkiezing van de docent van het jaar. Om op die manier te benadrukken wat u allemaal weet: dat het beroep van leraar ook vele leuke en inspirerende kanten heeft, en dat leraren leuke mensen zijn; geen treurende, zeurende sukkels. Vanuit het platform VVVO ben ik toegetreden tot de jury. De prijsuitreiking zal zijn tijdens de Nationale Onderwijs Tentoonstelling in het voorjaar. De scholen ontvangen binnenkort bericht hierover.

Marian Kollenveld

INTERVIEW

Afscheid van twee VUT-ters

Victor Schmidt

Op de afgelopen jaarvergadering hebben **Hans van Lint** en **Freek Mahieu** afscheid genomen van het bestuur van onze vereniging. Na talrijke bestuursjaren dragen zij hun portefeuille over aan de jonge generatie. Naar aanleiding van hun vertrek uit het bestuur heb ik met beiden een gesprek, dat gehouden wordt na afloop van een van hun laatste bestuursvergaderingen.

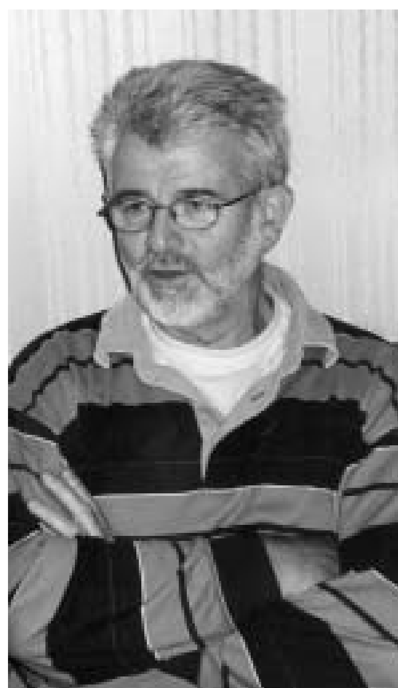
Kunnen jullie iets over jullie school- en bestuurscarrière vertellen?
Hans: Na mijn studie wiskunde, natuurkunde en sterrenkunde stond ik op mijn vierentwintigste voor de klas. Ik wist al op de middelbare school dat ik leraar wou worden. Ik heb, en dat mag best uniek heten, al mijn onderwijsjaren aan één school doorgebracht. Deze school nam aan tal van experimenten deel in het wiskundeonderwijs. Dat heeft me altijd erg aangesproken. Ik ben in de zestiger jaren lid geweest van de toenmalige Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde en kon hetgeen in deze commissie werd bedacht, direct in mijn eigen school uitproberen. Onderwijsvernieuwingen spreken mij in het algemeen erg aan en mijn school bood voldoende mogelijkheden om daarmee bezig te zijn. Wij hebben eerst op school een mavo opgebouwd vanaf de eerste klas. Daar ook eens les geven vond ik best een uitdaging. Toen de school fusies aanging met andere vbo-mavoscholen, werd het geheel onoverzichtelijk en heb ik gebruik gemaakt van de mogelijkheid om met de VUT te gaan.
In de vereniging heb ik tien jaar deel uitgemaakt van het bestuur, waarvan negen als voorzitter.
Freek: Mijn keuze voor een loopbaan in het onderwijs heeft op de lagere school al gestalte gekregen. Ik vond het leuk om andere leerlingen te helpen met de leerstof. Ik heb Mulo B gedaan en mocht daarna de eerste klas van de kweekschool overslaan. De kweekschool heb ik gehaald met aantekening handenarbeid en lichamelijke opvoeding. Ik heb deze vakken daadwerkelijk gegeven.


Hans van Lint

Na drie jaar als onderwijzer op een lagere school ben ik vanuit mijn geboorteplaats Den Helder op de Mulo in Boxtel beland, die later uit zou groeien tot één van de grootste zelfstandige mavo's in Nederland. In de avonduren heb ik Hoofdakte, LO Wiskunde en Duits en later MO-A Wiskunde gehaald. Bovendien werd ik in die tijd adjunct-directeur.

Mijn intrede in het bestuur dateert van 1974. Aanleiding was dat ik kritiek had geleverd op een bepaalde vierkeuzevraag in het mavo-examen. Blijkbaar was dat zo bijzonder dat ik in de CEVO werd benoemd tot opgavenmaker en vrij kort daarna gevraagd werd in het bestuur van de NVvW. Binnen het bestuur deed ik aanvankelijk vooral de examens en de examenbesprekingen.

Hoe komt iemand er toe 24 jaar lang in het bestuur te zitten?
Freek: Ik heb mijn bestuursfunctie altijd boeiend gevonden. Telkens dienden er zich nieuwe dingen aan: het eindeloos zoeken naar geschikte didactiek, het geven van een visie op nieuwe eindexamenprogramma's en nomenclatuur, het instellen van een PR-com-


Freek Mahieu

missie, het meewerken aan de nieuwe vormgeving van Euclides, het samenwerken namens het bestuur met de redactie en het organiseren van evenementen zoals de jaarvergadering/studiedag. Kortom, altijd was er verandering en weer een nieuwe uitdaging.

studiereis naar Schotland van een paar jaar geleden heb ik mijn ogen uit gekeken. Hoe ze daar omgaan met verschillende niveaus van de leerlingen in de klas.

bestuursleden. Toen zij het bestuur verlieten viel er een gat, maar dat hebben we opgevuld door meer als team te opereren. Ik was geen voorzitter die met de vuist op tafel slaat. Voor mij is de teamgeest in het bestuur erg belangrijk geweest.



Hans: Dat geldt ook voor mij, maar tien jaar vind ik lang genoeg. Bovendien past de professionalisering van het verenigingsbestuur niet zozeer bij mijn persoon. Ik zou me er niet in thuis voelen, hoewel ik de noodzaak van de professionalisering zeer wel ondersteun.

Wat voor vereniging was de NVvW toen jullie aantraden?
Freek: Wat het meest verschilt met nu is dat de vereniging mij toen erg afwachtend leek. Ze reageerde meer op ontwikkelingen dan dat ze die zelf opriep. Bovendien was de NVvW nog sterk gericht op het vak van wiskunde. De didactiek van de wiskunde kwam toen net in de algemene belangstelling. De Schotse methode, die de basis was van de boeken Moderne Wiskunde, werd met belangstelling ontvangen en de didactiekcursussen waren steeds volgeboekt.
Hans: Ja, voor wat betreft zelfstandig werken en leren lopen ze in Schotland voor ons uit. Tijdens een

Freek: De vereniging is in de jaren zestig opengesteld voor leden met een tweede- of derdegraads bevoegdheid. De toeloop van leden uit het beroepsonderwijs en mulo/mavo kwam langzaam op gang. Daar hoorde ik ook bij.

Voelde je je daar niet ongemakkelijk bij?
Nee, ik had een duidelijke taak en positie in het bestuur vanwege mijn bemoeienis met de examens. Daarin heb ik mij altijd verzet tegen de meerkeuzevragen in het mavo-examen wiskunde. Toen in 1985 voorgesteld werd alleen nog maar meerkeuzevragen op te voeren heb ik mij heftig verzet met het argument dat 99% van de leraren het met mij eens was. Ik kon deze bewering staven met steun van de vereniging.

Hans: Bij mijn aantreden zaten Jan Maassen en Felix Gaillard in het bestuur. Zij deden erg veel voor de vereniging en dat bepaalde toen de bestuurscultuur. Altijd kon er een beroep gedaan worden op deze

En als het bestuur er dan niet uit kwam?
Hans: Dan liet ik liever een paar bestuursleden het discussiepunt nog eens op papier zetten om er de volgende keer over door te praten dan een beslissing te forceren.

Als jullie de vereniging van nu vergelijken met die toen jullie aantraden, wat zijn dan de meest in het oog springende verschillen?
Hans: Wat Freek net al zei, de vereniging is veel minder afwachtend geworden. Er is nu veel meer dynamiek in de vereniging. Er wordt door de buitenwereld meer belang gehecht aan de standpunten die de vereniging inneemt. Bovendien is de vereniging veel meer een vereniging voor álle wiskundeleraren, dus niet alleen voor eerstegraders. Dat is voor mij altijd belangrijk geweest. We zijn een vereniging van leraren voor leraren, ook voor tweedegraads leraren en wiskundeleraren uit het mbo of hbo.
Freek: Ik zie ook dat de betrokkenheid van de leden sterker geworden

is. We betrekken de mensen meer bij onze activiteiten. Ook onze evenementen krijgen steeds meer aanzien. Zo'n jaarlijkse studiedag bijvoorbeeld is uitgegroeid van een studiegroepje na afloop van de ledenvergadering tot een niet weg te denken evenement voor wiskundeleraren. Als ik alleen al kijk naar de verschillende stands die elk jaar opgesteld staan. Dat was vroeger toch niet denkbaar.

Als je terugkijkt, wat ervaren jullie dan als hoogtepunten?
Hans: Ik heb een lijstje gemaakt met punten die tijdens mijn bestuursperiode aan de orde zijn geweest. We hebben in de afgelopen tien jaar veel veranderingen in het wiskundeonderwijs meegemaakt. Noem HEWET, HAWEX, de COW en Profi…

Maar bij al die veranderingen heeft een Freudenthal instituut toch een belangrijker rol gespeeld. Daar werd alles toch uitgedacht?
Hans: Uiteraard heeft het Fi een belangrijke rol gespeeld, maar vergis je niet, als vertegenwoordiger van het beroepsveld hebben we achter de schermen forse kritiek geleverd op de verschillende plannen, vooral voor wat betreft de haalbaarheid en de hoeveelheid stof. Via hoorzittingen en werkgroepen is de mening van leden ook ingebracht.
Freek: Ja, de behoefte aan een vakvereniging als de onze blijkt ook uit de ledenaantallen. We zijn de laatste jaren gegroeid van pakweg 2900 naar 3400 leden. Dat kunnen maar weinig soortgelijke verenigingen ons nazeggen.

Zijn er andere hoogtepunten?
Hans: De regionale studiebijeenkomsten . Wat ooit begonnen is als een uitwisseling van proefwerken in Rotterdam, is nu een in het oog springend evenement. Maar nog steeds is het devies 'leraren voor leraren' en 'de vereniging komt naar u toe'. Verder vind ik de overdracht van Euclides naar de vereniging een verdienste. Het heeft ons heel wat moeite gekost, maar ik vind dat de overdracht goed gelukt is. Daarnaast is de relatie tussen het bestuur en de redactie van Euclides verbeterd. Als ik nog terug denk aan het conflict over de doelgroep van het blad, dat destijds speelde tussen bestuur en redactie, dan is er toch veel ten goede gekeerd. Iets anders is het Wereldwiskunde Fonds dat wij als bestuur hebben ingesteld. Het is zeer verheugend dat het merendeel van de leden vijf gulden contributie extra over heeft voor dit fonds, dat vrij uniek is voor vakinhoudelijke verenigingen.



Hans: Waar ik verder met genoegen op terug kijk is dat we in staat zijn gebleken de vereniging te verbreden. Kijk maar naar de mto-groep en onze initiatieven ten aanzien van het hbo.

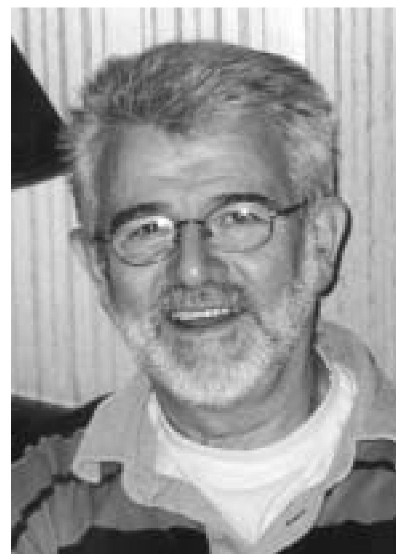
Welke problemen zien jullie voor de toekomst?
Freek: De vereniging drijft nog steeds op vrijwilligerswerk. Dat heeft zijn charme, maar de vraag is hoelang dat vol te houden is.

Hans: Dat zie je ook in het beroep van leraar. Alles wordt in belastingsuren met een aantal cijfers achter de komma uitgedrukt. Ik vind professionalisering wel terecht, maar er verdwijnt ook iets.

Welke raad zouden jullie, op het gevaar af beschuldigd te worden over het graf te regeren, aan jullie opvolgers willen geven?
Freek: De professionalisering voortzetten, een eigen gezicht tonen, een denktank vormen in wiskundig Nederland en de resultaten van dit alles uitdragen in Euclides, de website of misschien zelfs een boek …

Hans: Er naar blijven streven een vereniging te zijn voor alle wiskundeleraren. Misschien moet er meer samenwerking gezocht worden met bijvoorbeeld het Wiskundig Genootschap, de NVORWO of de Vereniging voor Statistiek.

Mag ik jullie hartelijk danken voor dit interview?



Vierde Mathematische Modelleercompetitie Maastricht 1998

Jacob Perrenet

Inleiding

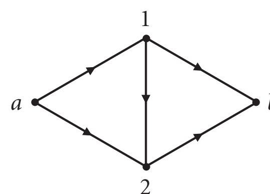
Op zaterdag 24 januari 1998 vond de vierde Mathematische Modelleercompetitie Maastricht plaats. De wedstrijd werd georganiseerd door medewerkers van de opleiding Kennistechnologie en medewerkers van de opleiding Econometrie van de Universiteit Maastricht. Gedurende twee uur bogen 103 scholieren zich in teams over vijf opgaven. De deelnemers waren vijfde- en zesdeklassers vwo, afkomstig van 20 scholen uit Nederland en België. Er waren in totaal 25 teams.
Voor de begeleidende leerkrachten was er een programma met lezingen over onderwerpen uit de Econometrie en de Kennistechnologie, gegeven door docenten van deze beide exacte opleidingen van de UM. De voordrachten gingen achtereenvolgens over fractalen, zoektechnieken bij combinatorische problemen, verdeelproblemen en beslissen in 'fuzzy' situaties (een zogenaamde fuzzy verzameling heeft lidmaatschapswaarden tussen 0 en 1).
Bijna de helft van het aantal deelnemers was afkomstig uit België. Deelname uit Amsterdam en Leiden geeft aan dat deze wedstrijd binnen Nederland meer dan regionale aantrekkingskracht heeft gekregen.
Voor de eerste maal ging de eerste prijs naar een Belgisch team en wel het team bestaande uit Bert Vanmierlo, Veerle Houben, An Nouwen, Gert Vliegen en Tim Lemmens van het St. Augustinusinstituut uit Bree. De tweede prijs was voor het Bisschoppelijk College Broekhin uit Roermond. Op de derde plaats eindigde het St. Jozef College uit Turnhout samen met het Montessori College uit Maastricht.
Hieronder geven we eerst de vijf opgaven en daarna beschrijven we globaal de oplossingen en de resultaten.

De opgaven

OPGAVE 1: LANDKAART KLEUREN
Neem een vel papier en trek daarop 300 rechte lijnen, steeds over het hele vel, en willekeurig. (Je hoeft dit niet echt uit te voeren.) Zo ontstaat een landkaart, en de landen daarvan kunnen we kleuren. Een kleuring heet toelaatbaar als elke twee landen die in méér dan één punt aan elkaar grenzen, verschillende kleuren krijgen. Hoeveel kleuren zijn maximaal nodig om de kaart toelaatbaar te kleuren? Waarom?

OPGAVE 2: DE SPIN IN DE KUBUS
Een spin zit binnen in een kubus met ribbe 1 en verkent iedere dag alle zes vlakken aan de binnenkant van de kubus, op zoek naar iets eetbaars. De spin wil het 'inwendige' van elk vlak bezoeken. De spin kan niet vliegen noch zich laten vallen. Bovendien wil de spin weer op haar uitgangspunt terugkeren. Om energie te sparen wil de spin de af te leggen weg zo kort mogelijk houden.
a Wat is de beste startpositie voor de spin?
b Welke weg moet de spin afleggen?
c Hoe lang is die weg?

OPGAVE 3: VOETBALWEDSTRIJD
De voetbalsupporters van de club uit plaats *a* willen een uitwedstrijd van hun ploeg in plaats *b* volgen. Ze hebben daarvoor het volgende wegennetwerk tot hun beschikking, waarin naast de steden *a* en *b* ook de steden 1 en 2 voorkomen. Een pijl geeft de richting aan in welke een weg gereden kan worden. Bijvoorbeeld de weg tussen de steden 1 en 2 kan alleen van 1 naar 2 genomen worden.



figuur 1: Wegennet opgave 3

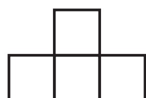
Nu is de capaciteit van de wegen beperkt. Zo kunnen iedere minuut maximaal 11 auto's starten in *a* om naar 2

te rijden. De capaciteiten van de wegen zijn in onderstaande tabel weergegeven. Tenslotte is de lengte en daardoor de reistijd over de wegen variabel. Zo is de reistijd van 1 naar 2 precies 3 minuten. De reistijden over alle wegen zijn ook in onderstaande tabel weergegeven.

	$(a,1)$	$(a,2)$	$(1,2)$	$(1,b)$	$(2,b)$
Reistijd	1	2	3	3	2
Capaciteit	10	1	7	6	11

Gevraagd wordt nu hoeveel auto's in een tijdsinterval van 6 minuten van *a* naar *b* kunnen rijden.

OPGAVE 4: TETRIS
Een tetris speelbord bestaat uit een rechthoek van 11 velden breed en 20 velden hoog. Van boven naar beneden vallen stukjes die allemaal uit vier deelblokjes bestaan. De speler kan deze stukjes naar links of naar rechts verplaatsen en eventueel draaien over 90, 180 of 270 graden. Telkens wanneer een horizontale rij velden geheel gevuld is, verdwijnen de deelblokjes die zich daarop bevinden van het speelbord en zakken alle deelblokjes die zich daarboven bevinden een rij omlaag. Wanneer er geen stukjes meer op het bord geplaatst kunnen worden is het spel afgelopen.
In deze opgave bekijken we de situatie waarbij uitsluitend stukjes naar beneden vallen van de volgende vorm:



Figuur 2: Vorm tetrisstukjes opgave 4

a Is het mogelijk om deze variant van het spel oneindig lang aan de gang te houden, of loopt het bord langzamerhand vol? (Hint: Probeer een structuur te ontdekken die je kunt herhalen.)
b Is het in deze variant mogelijk om op een bepaald moment weer een geheel leeg speelbord te krijgen?

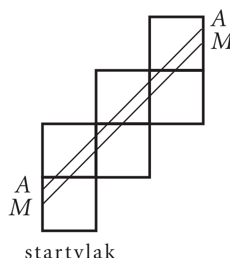
OPGAVE 5: HET STAARTJE
Van de volgende staartdeling is één cijfer bekend en wel het cijfer zeven.
Los de staartdeling op. (Hint: Probeer eerst de uitkomst van de staartdeling te bepalen.)

```
***/********\*7***
  ****
    ***
    ***
    ****
     ***
      ****
      ****
         0
```

Figuur 3: De in te vullen staartdeling van opgave 5

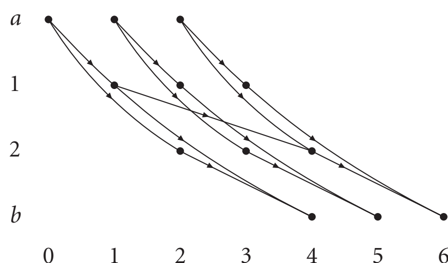
Oplossingen en resultaten

1: LANDKAART KLEUREN
De opgave is een simpele variatie op het thema van de vier-kleurenstelling: vier kleuren is genoeg om iedere denkbare landkaart zo in te kleuren dat landen van dezelfde kleur elkaar niet raken. De bedoeling van de opgavetekst was ongetwijfeld 'Hoeveel kleuren zijn minimaal nodig ...'. Vrijwel alle deelnemers interpreteerden de opgave ook op deze wijze.
De meeste groepjes kwamen via een plausibele redenering over het even aantal vlakken met gemeenschappelijk raakpunt en de onmogelijkheid voor een land om bij dezelfde grenslijn meerdere buurlanden te hebben, tot het juiste antwoord 2.
Het was meestal alles of niets: enkele groepjes wisten totaal niets met de opgave aan te vangen. Eén groepje zocht wel degelijk naar het maximale aantal en vond het maximum voor het aantal snijpunten:
$300(300-1)/2$. Verder kwamen ze echter niet.
Op deze opgave werd - vergeleken met de andere opgaven - gemiddeld het hoogst gescoord, waarbij de Belgen het iets beter deden dan de Nederlanders.
2: DE SPIN IN DE KUBUS
De oplossing is snel te zien met een uitslag van de kubus zoals in figuur 4. Het startpunt blijkt niet uit te maken, als het maar niet een hoekpunt is.
Vijf groepjes maakten de opgave zonder fouten en vonden ook de juiste lengte van de route van $3\sqrt{2}$ (te berekenen bij startpunt *M*).
Een regelmatig voorkomende fout was de beperking van de startpositie tot het midden van een ribbe. Los daarvan werd 'het inwendige van een vlak' een aantal maal als 'het middelpunt van een vlak' begrepen.



Figuur 4: Enkele mogelijke beste routes voor de spin

3: VOETBALWEDSTRIJD
Een manier om deze opgave op te lossen, is door in eenzelfde schema met reizen zowel plaats als tijd mee te nemen. In figuur 5 staan verticaal de vier plaatsen en horizontaal de tijdstippen 0 tot en met 6 minuten.



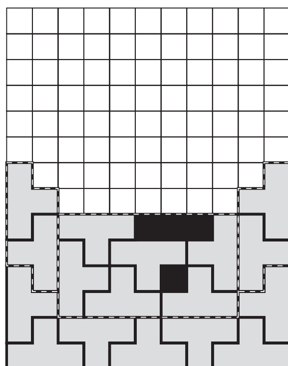
Figuur 5: Reizen met wegen en tijden (opgave 3)

Rekening houdend met de capaciteit komen we tot:

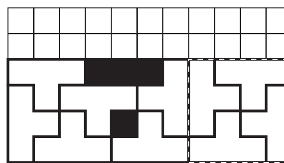
$(a,0) - (2,2) - (b,4)$	11 *auto's*
$(a,1) - (2,3) - (b,5)$	11 *auto's*
$(a,2) - (2,4) - (b,6)$	11 *auto's*
$(a,0) - (1,1) - (b,4)$	6 *auto's*
$(a,1) - (1,2) - (b,5)$	6 *auto's*
$(a,2) - (1,3) - (b,6)$	6 *auto's*
$(a,0) - (1,1) - (2,4) - (b,6)$	2 *auto's*

Dit levert een totaal van 53 auto's.
Het aantal 53 werd door 17 groepjes gevonden; drie daarvan gebruikten een samengesteld schema, de meesten redeneerden met de wegengraaf op achtereenvolgende tijdstippen. Er werden geen pogingen ondernomen te bewijzen dat 53 ook het maximale aantal is. De foute antwoorden varieerden van 30 tot 72.
De Nederlanders konden met deze opgave gemiddeld wat beter overweg dan de Belgen.

4: TETRIS
Grappig aan deze opgave is, dat een oplossing voor onderdeel b natuurlijk meteen de oplossing van deel a is. Een onafhankelijke oplossing voor a is weergegeven in figuur 6.


Figuur 6: Een oplossing van opgave 4a

Een patroon bestaande uit 11 stukjes kan worden herhaald. De zwart aangegeven delen vormen na het verdwijnen van de tussenliggende rij weer een opening met de vereiste vorm. 17 van de 25 teams gaven wel 'ja' als antwoord op de eerste vraag, maar bij bijna de helft daarvan klopte de argumentatie niet.
Slechts drie teams hadden de goede oplossing van de tweede vraag (de meesten dachten dat leeg spelen niet mogelijk was). Een oplossing is te zien in figuur 7.


Figuur 7: Een oplossing van opgave 4b

Deze opgave bleek de moeilijkste.

5: HET STAARTJE
De oplossing is op de volgende wijze te vinden.
Ten eerste moet de uitkomst (het quotiënt) gevonden worden, zoals de hint bij de opgave al suggereert. Hierbij is het belangrijk te letten op het aantal posities in de uitwerking: aan het eind zijn twee cijfers na elkaar aangehaald; daarom is het vierde cijfer van het quotiënt gelijk aan 0. Verder redenerend met de aantallen cijfers wordt het quotiënt 97809 gevonden.
Vervolgens kan via het bepalen van de maximale en de minimale waarde de deler worden gevonden: 124.
Een derde deel van de teams had de opgave geheel goed. Ook dit bleek een 'alles of niets' opgave, zij het minder extreem dan opgave 1.

Terugblik en vervolg

Voorafgaand aan de prijsuitreiking werden de opgaven toegelicht. Volgens de ingevulde enquêtes werd de uitleg door de meesten goed begrepen. *Alle* deelnemers gaven in de enquête aan de wedstrijd leuk of zelfs heel leuk gevonden te hebben.

De vijfde Mathematische Modelleercompetitie Maastricht zal zijn op **zaterdag 23 januari 1999**. Men kan zich opgeven bij Yolanda Paulissen of Karin van der Boorn, Secretariaat Kwantitatieve Economie, Faculteit der Economische Wetenschappen en Bedrijfskunde, Universiteit Maastricht, Postbus 616, 6200 MD Maastricht (NL), telefoon: 0(031)43-3883834 respectievelijk …3835.

Algemene informatie is te verkrijgen bij Dr. Frank Thuijsman van de vakgroep Wiskunde (...3489) of Prof. Hans Peters van de vakgroep Kwantitatieve Economie (…3834).

Laatste nieuws Tweede Fase

Kees Hoogland

Inleiding

Bij een grote verandering als die van de Tweede Fase is het blijkbaar vrijwel onvermijdelijk dat allerlei regelingen nog een tijdje aan verandering onderhevig blijven. De redactie van Euclides probeert u steeds zo goed mogelijk daarvan op de hoogte te houden.
In dit artikel kort een aantal belangrijke recente aandachtspunten:
- IJskast vwo wiskunde B1 en B12;
- Grafische rekenmachine in examenprogramma;
- Experiment Computeralgebra en Symbolische rekenmachine.

IJskast vwo wiskunde B1 en B12

Zeer recent heeft de Staatssecretaris besloten dat wegens overladenheid een aantal onderwerpen uit vwo wiskunde B1 en vwo wiskunde B12 naar de “ijskast” verdwijnen.
Over enige tijd zal dit nog formeel in Uitleg worden medegedeeld.
Alleen aan teksten in Uitleg kunnen overigens rechten worden ontleend.
In de onderstaande teksten betekent “tot nader order”, dat het hoogstwaarschijnlijk pas weer verandert als er herziene examenprogramma's komen. En die zijn niet te verwachten voor 2004, 2005 of iets dergelijks.

vwo wiskunde B1 (voor N&G en N&T)
Tot nader order worden er op het centraal examen geen vragen gesteld over het
Domein Cb: Continue dynamische modellen, eindtermen 99-106.
Deze eindtermen moeten *wel* op het schoolexamen getoetst worden.

vwo wiskunde B2 (voor N&T)
Domein Gb: Voortgezette meetkunde.
Tot nader order worden er op het centraal examen geen vragen gesteld over:
- subdomein: Beginselen uit de analytische meetkunde, eindtermen 140-144
- een gedeelte van subdomein: Meetkundige plaatsen en kegelsneden, te weten de eindtermen 151-153 (analytische meetkunde).

Ook op het schoolexamen hoeven deze onderwerpen *niet* getoetst te worden.
Domein Hb: Voortgezette analyse.
Tot nader order worden er op het centraal examen geen vragen gesteld over:
- subdomein: Sommeerbare rijen, eindtermen 167-169
- subdomein: Irrationale getallen, eindtermen 170-172
- subdomein: Limieten en functies, eindtermen 173-175.

Ook op het schoolexamen hoeven deze onderwerpen *niet* getoetst te worden.

Grafische rekenmachine en examenprogramma

Regelmatig vallen verschillende opvattingen te beluisteren over de precieze plaats en het belang van de grafische rekenmachine bij de examens.
In de laatste officiële en door de tweede kamer goedgekeurde versie van de examenprogramma's staat bij alle wiskundeprogramma's het volgende vermeld:
Op het centraal examen dient de kandidaat te beschikken over een grafische rekenmachine.
U kunt dit nalezen in de examenprogramma's, die als CFi-brochures door het Ministerie naar alle scholen zijn gestuurd.

Computeralgebra en Symbolische Rekenmachine

Alweer enige tijd geleden heeft een adviescommissie van de Vereniging een rapport uitgebracht over de rol die Computeralgebra en/of de Symbolische Rekenmachine kan gaan spelen in het programma voor de Tweede Fase. Het volledige rapport is te vinden op de website van de Vereniging.
Hieronder volgen uit de aanbevelingen de mijns inziens belangrijkste.
De Adviescommissie adviseert het bestuur van de Vereniging
- te bevorderen dat op korte termijn een gedegen experiment van start gaat, waarin de mogelijkheden onderzocht worden van het gebruik van computeralgebra in het wiskundeonderwijs in de Tweede Fase van havo en vwo. Bij een dergelijk experiment zou zowel een eenvoudig te bedienen computerprogramma als een symbolische rekenmachine betrokken dienen te worden;
  (…)
- de extra belasting die de invoering van computeralgebra betekent voor de wiskundedocent te minimaliseren door een optimale begeleiding middels nascholing en het beschikbaar stellen van geschikt les- en toetsmateriaal;
- te bevorderen dat de kosten van computeralgebra voor de leerling niet te hoog zijn.

Het bestuur heeft deze aanbevelingen overgenomen. Wij zullen u op de hoogte houden van de ontwikkelingen. Misschien een idee om alvast eens wat rond te snuffelen in Derive, Maple of andere algebra-pakketten.

Veelvlak

Leo H. van den Raadt

Inleiding

Door een samenloop van omstandigheden wilden de leerlingen van 5 havo een hoofdstuk differentiëren en een hoofdstuk meetkunde combineren voor een proefwerk. Om het proefwerk niet te laten bestaan uit een verzameling van sommen uit de afzonderlijke hoofdstukken, ontstond het volgende vraagstuk.

Bij het oplossen van opgave d ontstond een verrassend resultaat. Er geldt:

$$U(h) = \frac{I(h)}{O(h)} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1 + 2h}{\sqrt{\frac{1}{4} + h^2}} \text{ en}$$

$$U'(h) = \frac{1}{12} \cdot \frac{\frac{1}{2} - h}{(\frac{1}{4} + h^2)^{3/2}}$$

Kubus met piramiden

Op alle zijvlakken van een kubus *ABCD.EFGH* met ribbe 1 wordt een regelmatige piramide geplakt. Deze piramiden hebben alle als grondvlak een vierkant met zijde 1 en hebben alle hoogte h. In figuur 1 zijn twee van deze piramiden aangegeven. Het lichaam dat zo ontstaat, noemen we L.

a Hoeveel van deze piramiden kun je op deze kubus plakken?

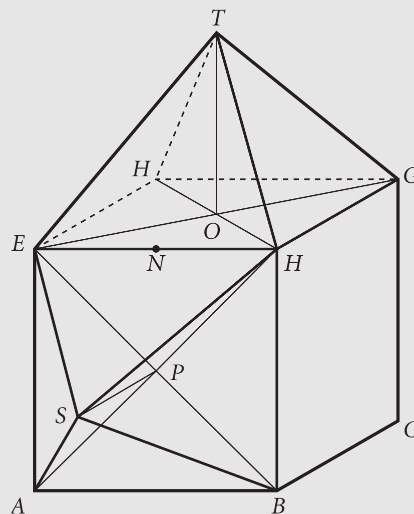
b Hoeveel zijvlakken heeft dit lichaam L?

Voor de berekening van het gehele oppervlak $O(h)$ geldt het volgende verband: $O(h) = 12\sqrt{\frac{1}{4} + h^2}$

c Toon aan dat deze formule juist is.

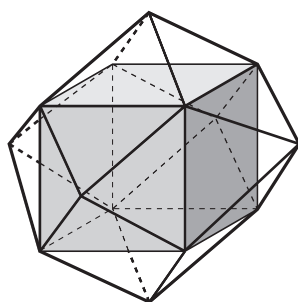
Voor de inhoud van dit lichaam $I(h)$ geldt dan het volgende verband: $I(h) = 1 + 2h$

d Voor welke waarde van h heeft L de grootste inhoud bij het kleinste oppervlak wanneer we h vrij kunnen kiezen? Met andere woorden, voor welke waarde van h is $I(h)/O(h)$ maximaal? Noem deze verhouding U.



Figuur 1: Kubus *ABCD.EFGH* met twee van de piramiden die op de zijvlakken worden geplakt.

De afgeleide is gelijk aan nul als $h = \frac{1}{2}$
Uit het tekenverloop van de afgeleide U' is af te leiden dat hier sprake is van een maximum.
Door een eenvoudige berekening in het vlak door T, S en het middelpunt van de kubus, is nu aan te tonen dat de zijvlakken *TEF* en *EFS* (figuur 1) in één vlak liggen. Het lichaam L wordt in dit geval niet begrensd door 24 driehoeken, maar door 12 ruitvormige zijvlakken. De diagonalen van deze ruiten hebben de lengte 1 (de ribben van de kubus) en de lengte $\sqrt{2}$ (figuur 2).

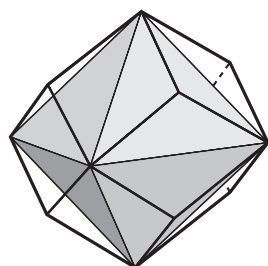


Figuur 2: Kubus met zes piramiden wordt een ruitentwaalfvlak als de verhouding van inhoud en oppervlak maximaal is.

Het uiteindelijke resultaat is zeer verrassend. De vraag die in dit artikel verder wordt bekeken, is of dit resultaat ook opgaat in vergelijkbare gevallen.

Andere gevallen

Als dit gegeneraliseerd kan worden dan zou dit betekenen dat als we aan een ander regelmatig veelvlak weer piramiden toevoegen, een lichaam ontstaat dat begrensd wordt door ruiten.
Beschouw een regelmatig achtvlak met ribbe 1. Op ieder zijvlak van dit achtvlak plakken we een regelmatige driezijdige piramide met een grondvlak met zijde 1 en met hoogte h. We eisen dat de verhouding van inhoud en oppervlak maximaal moet zijn. Er ontstaat dan niet een lichaam begrensd door 24 driehoeken maar door 12 ruitvormige zijvlakken. De diagonalen van de ruiten hebben de lengten 1 en $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Het lichaam blijkt dus gelijkvormig te zijn met het lichaam dat ontstaat uit de kubus (figuur 3).



Figuur 3: Regelmatig achtvlak met acht toegevoegde piramiden wordt ook een ruitentwaalfvlak als de verhouding van inhoud en oppervlak maximaal is.

Algemene regel

Nog sterker dan hiervoor dringt de vraag zich op of dit geldt voor elk regelmatig viervlak.
Aan elk zijvlak van een regelmatig veelvlak wordt een regelmatige piramide met een grondvlak gelijk aan het zijvlak en een hoogte h toegevoegd. Leidt de eis dat de verhouding van inhoud en oppervlak maximaal is, tot het geval dat telkens twee zijvlakken van aangrenzende toegevoegde piramiden in een vlak liggen? Het ontstane lichaam wordt dan niet begrensd door k driehoekige zijvlakken maar door $k/2$ ruitvormige zijvlakken.
Hieronder staan de regelmatige viervlakken nog eens genoemd met het aantal zijvlakken van het ontstane lichaam L.

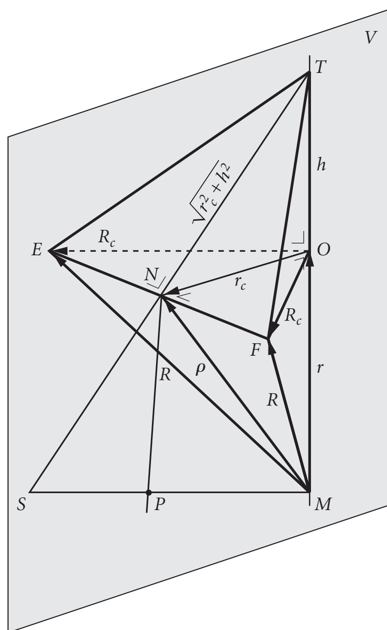
regelmatige veelvlak	**aantal zijvlakken van het lichaam dat ontstaat:**
viervlak	$(4 \cdot 3)/2 = 6$
kubus	$(6 \cdot 4)/2 = 12$
achtvlak	$(8 \cdot 3)/2 = 12$
twaalfvlak	$(12 \cdot 5)/2 = 30$
twintigvlak	$(20 \cdot 3)/2 = 30$

Bewijs

Op grond van de symmetrie-eigenschappen van de regelmatige veelvlakken is in te zien dat bij ieder regelmatig veelvlak drie bollen met hetzelfde middelpunt M horen:
- een omgeschreven bol door alle hoekpunten met straal R;
- een bol met straal ρ die raakt aan de middens van alle ribben. Noem één van deze ribben EF, noem het midden van deze ribbe N;
- een bol met straal r die raakt aan de middelpunten van alle zijvlakken. Noem de middelpunten van de zijvlakken die EF gemeen hebben, respectievelijk O en P.

Het raakpunt O van deze kleinste bol aan een zijvlak is het middelpunt van twee cirkels:
een omgeschreven cirkel met straal R_c van het zijvlak en een ingeschreven cirkel met straal r_c van het zijvlak.
Voor de straal R_c van de omgeschreven cirkel geldt dat $R_c^2 = R^2 - r^2$.
Voor de straal r_c van de ingeschreven cirkel geldt dat $r_c^2 = \rho^2 - r^2$.
Beschouw een regelmatig veelvlak K. Afhankelijk van K zijn de zijvlakken of gelijkzijdige driehoeken, of vierkanten of regelmatige vijfhoeken. Elk zijvlak kan, vanuit het middelpunt van dat zijvlak, verdeeld worden in drie, vier of vijf gelijkbenige driehoeken. Beschouw de

twee zijvlakken van *K* die de ribbe *EF* gemeen hebben. De ribbe *EF* is dan de basis van twee van dergelijke gelijkbenige driehoeken: ΔEFO waarbij *O* het middelpunt is van een van deze zijvlakken en ΔEFP waarbij *P* het middelpunt is van het aangrenzende zijvlak.
Door *M*, *N* en *O* gaat een vlak *V*. Het vlak *V* snijdt de ribbe *EF* waarvan *N* het midden is, loodrecht. Vanwege de symmetrie gaat het vlak *V* ook door het middelpunt *P* van het aangrenzende zijvlak. Het vlak *V* gaat ook door de toppen *T* en *S* van de piramiden toegevoegd aan respectievelijk het zijvlak met middelpunt *O* en het zijvlak met middelpunt *P*. De punten *T* en *S* liggen loodrecht boven de middelpunten *O* en *P* van de respectievelijke zijvlakken en dus op de verlengden van *MO* en *MP* (figuur 4).



Figuur 4: Vlak *V* is het middelloodvlak van de ribbe *EF* van het regelmatige veelvlak *K*. *V* gaat door het middelpunt *M* van het veelvlak en door de middens, *O* en *P*, van de zijvlakken. De stralen van de bollen en cirkels zijn aangegeven..

Het regelmatige veelvlak *K* met de toegevoegde piramiden (lichaam *L*) is opgebouwd uit een groot aantal congruente delen zoals *M.EFO.T*
Omdat de zijvlakken van een regelmatig twaalfvlak verdeeld kunnen worden in vijf gelijkbenige driehoeken, is een regelmatig twaalfvlak opgebouwd uit 60 van deze delen.
Het onderdeel *M.EFO.T* is opgebouwd uit twee driezijdige piramiden:

- *M.EFO* die deel uitmaakt van *K*. Als *EFO* als grondvlak wordt beschouwd, dan is *MO* de hoogte.
- *T.EFO* die deel uitmaakt van de toegevoegde piramide. Als *EFO* als grondvlak wordt beschouwd, dan is *TO* de hoogte.

Er geldt nu:
$MO = r$
$MN = \rho$
$OT = h$
$NO = r_c$
$NT = \sqrt{r_c^2 + h^2}$

De oppervlakte van ΔEFO hangt niet af van de hoogte *h*.
De oppervlakte van ΔEFO geven we aan met A_O.
De inhoud van *M.EFO* geven we aan met C_M.
Er geldt dan $C_M = \frac{1}{3}A_O r$.
De inhoud van *T.EFO* geven we aan met C_T.
Er geldt dan $C_T = \frac{1}{3}A_O h$.
De inhoud van *M.EFO.T* geven we aan met *C*.
C hangt af van *h*.
Er geldt dan dat $C(h) = C_M + C_T = \frac{1}{3}A_O\,(r + h)$.
Alleen ΔEFT ligt aan de buitenkant van *L*. De oppervlakte van ΔEFT hangt wel af van de hoogte *h*; de oppervlakte van ΔEFT geven we aan met $A_T(h)$.
Omdat de ribbe *EF* de lengte 1 heeft, is
$A_T(h) = \frac{1}{2}\sqrt{r_c^2 + h^2}$.

De eis dat de verhouding $U(h)$ van de inhoud en het oppervlak van *L* maximaal is, komt overeen met de eis dat de verhouding van de inhoud van *M.EFO.T* en het oppervlak *EFT* maximaal is.

Nu geldt:

$$U(h) = \frac{I(h)}{O(h)} = \frac{C(h)}{A_T(h)} = \tfrac{2}{3}A_O\frac{r + h}{\sqrt{r_c^2 + h^2}} \quad \text{en}$$

$$U'(h) = \tfrac{2}{3}A_O\frac{r_c^2 - rh}{(r_c^2 + h^2)^{3/2}}$$

Bij een gegeven regelmatig *n*-vlak is A_O een constante.

De verhouding *U* heeft een extreem als $r_c^2 - rh = 0$, dus als $h = r_c^2/r$. Uit het tekenverloop van $U'(h)$ blijkt dat het een maximum is. De verhouding van inhoud/oppervlak van *L* heeft een maximum bij
$h = r_c^2/r$

De zijvlakken *EFT* en *EFS* liggen in één vlak als $\angle MNT = \angle MNS = 90°$, want dan is $\angle TNS$ gestrekt.
$\angle MNT = 90°$ als geldt dat $NM^2 + NT^2 = MT^2$
$\rho^2 + (r_c^2 + h^2) = (h + r)^2$
$\rho^2 + r_c^2 + h^2 = h^2 + 2hr + r^2$
$\rho^2 - r^2 + r_c^2 = 2hr$
Met behulp van $\rho^2 - r^2 = r_c^2$ wordt dit:
$2r_c^2 = 2hr$
$h = r_c^2/r$

Dus voor deze waarde van *h* geldt niet alleen dat de verhouding van de inhoud en oppervlakte van *L* maximaal

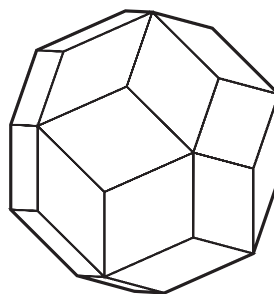
is, maak ook dat de zijvlakken van het type *EFT* en *EFS* in één vlak liggen. Samen vormen zij dus een ruit met de diagonalen *EF* en *ST*.

Bollen met middelpunt *M* van *L*

Het punt *M* is zowel het middelpunt van het oorspronkelijke regelmatige veelvlak *K* als van het lichaam *L* dat door toevoeging van de piramiden uit *K* ontstaat.
De bol met straal ρ en middelpunt *M* die raakt aan de middens van alle ribben van *K*, raakt nu de ruitvormige zijvlakken van *L* in het snijpunt van de diagonalen. *MN* staat namelijk loodrecht op het vlak *ESFT*. *L* heeft dus een ingeschreven bol [1]).

Beschouw een bol met middelpunt *M* en laat de straal toenemen. Dan zal de doorsnede met elk ruitvormige zijvlak een cirkel zijn met als middelpunt het snijpunt van de diagonalen van elk zijvlak. Er is een dergelijke bol met een straal zo dat elk van deze cirkels raakt aan de vier zijden van elk ruitvormige zijvlak. *L* heeft dus een bol die raakt aan alle ribben. Alleen als het zijvlak een vierkant is, raakt deze bol de ribben in het midden.

Als we de straal van deze bol verder laten toenemen, zal de doorsnede gaan door de hoekpunten die liggen op de korte diagonaal. Als de bol nog groter is, zal de doorsnijdingscirkel gaan door de hoekpunten die liggen op de lange diagonaal van de ruit. Alleen als het ruitvormige zijvlak even lange diagonalen heeft (dus een vierkant is) bezit het lichaam een omgeschreven bol, in alle andere gevallen bezit het lichaam *L* geen omgeschreven bol.



Figuur 5:Ruitendertigvlak. Terwille van de duidelijkheid is het oorspronkelijke twaalfvlak of twintigvlak niet aangegeven. Het twaalfvlak is te zien door alle korte diagonalen van de zijvlakken te tekenen; het twintigvlak door alle lange diagonalen te tekenen.

Verdere gegevens.
De hoekpunten liggen op verschillende afstanden van het middelpunt. De hoekpunten, die ook de hoekpunten van *K* zijn, liggen op een afstand *R*; de overige hoekpunten ontstaan bij de vorming van *L* uit *K*, liggen op een afstand

$$r + h = r + \frac{r_c^2}{r} = \frac{r^2 + r_c^2}{r} = \frac{\rho^2}{r}$$

De vorm van het ruitvormige zijvlak is te bepalen door de lengten van de diagonalen te berekenen. De diagonaal *EF* heeft de lengte 1 omdat deze diagonaal de ribbe van *K* is. De andere diagonaal kan berekend worden met de stelling van Pythagoras.

$$ST = 2\sqrt{r_c^2 + \left(\frac{r_c^2}{r}\right)^2} = \frac{2r_c\rho}{r} = 2\rho\sqrt{\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 1}$$

veelvlak	r	ρ	lengten diagonalen	
viervlak	$\frac{1}{12}\sqrt{6}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}$	1	1
Er ontstaat een kubus. Omdat de zijvlakken nu vierkanten zijn, heeft *L* ook een omgeschreven bol.				
kubus	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
Er ontstaat een ruitentwaalfvlak. De acht hoekpunten van de kubus liggen op een afstand $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ van het middelpunt. De zes toegevoegde hoekpunten liggen op een afstand van 1 van het middelpunt.				
achtvlak	$\frac{1}{6}\sqrt{6}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
Er ontstaat weer een ruitentwaalfvlak. Dit lichaam is gelijkvormig aan het vorige. Dit ruitentwaalfvlak is $\sqrt{2}$ keer zo klein als het ruitentwaalfvlak dat uit de kubus ontstaat.				
twaalfvlak	$\frac{1}{20}\sqrt{(250 + 110\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(3 + \sqrt{5})$	1	$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$
Er ontstaat een ruitendertigvlak. De 20 hoekpunten van het twaalfvlak liggen op een afstand van $\frac{1}{4}(\sqrt{15} + \sqrt{3})$ van het middelpunt. De 12 toegevoegde hoekpunten liggen op een afstand van $\frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ van het middelpunt.				
twintigvlak	$\frac{1}{12}(3\sqrt{3} + \sqrt{15})$	$\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$	1	$\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$
Er ontstaat weer een ruitendertigvlak. Dit lichaam is gelijkvormig met het vorige. Dit ruitendertigvlak is $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ keer zo klein als het ruitendertigvlak dat ontstaat uit het regelmatig twaalfvlak.				

Resultaten

We gaan uit van een regelmatig veelvlak waarvan de ribbe de lengte 1 heeft. Voor deze berekeningen kan worden uitgegaan van de straal van de ingeschreven bol en de bol die raakt aan alle ribben van K [2]). Een van de diagonalen van het ruitvormige zijvlak heeft de lengte 1. De resultaten zijn in de tabel samengevat.

Slot

Als op de zijvlakken van een regelmatig veelvlak K regelmatige piramiden met een willekeurige hoogte h worden geplaatst, ontstaat een lichaam L. De eis dat verhouding van de inhoud van L en het oppervlak van L maximaal is, leidt tot een bepaalde waarde van h. Bij deze waarde van h liggen twee driehoekige zijvlakken in een vlak. L wordt dan begrensd door ruiten. L is, afhankelijk van het oorspronkelijke regelmatige veelvlak, een kubus, een ruitentwaalfvlak of een ruitendertigvlak. Voor deze waarde van h bezit L ook een ingeschreven bol en een bol die raakt aan alle ribben. Met uitzondering van de kubus bezit L geen omgeschreven bol.

Achter een eenvoudige opgave kan toch meer wiskunde schuil gaan dan op het eerste gezicht vermoed wordt.

Noten

1 Achteraf gezien zou het verstandiger zijn om de straal van de bol die raakt aan alle ribben van het oorspronkelijke veelvlak, de lengte 1 te geven. De nieuw ontstane lichamen (kubus, ruitentwaalfvlak en ruitendertigvlak) hebben dan een ingeschreven bol van gelijke grootte.

2 Al deze gegevens (en nog vele andere zoals de hoek tussen de zijvlakken) zijn te vinden onder de letter 'P' van 'Platonic Solid' van Eric's Treasure Trove of Mathematics *www.astro.virginia.edu/~eww6n/math/*

40 jaar geleden

Over de doelstelling van de wiskunde zijn in de loop der eeuwen de opvattingen nog al eens veranderd. In de 17e en 18e eeuw was het onderwijs zeer praktisch gericht en schonk in feite alleen aandacht aan het numeriek rekenen voor zover dit betrekking had op de handel, terwijl het meetkundig onderricht bestond in het demonstreren van enkele praktische constructies. Aan het eind van de vorige eeuw werd evenwel het accent gelegd op het formele karakter van de wiskunde. Men hechtte bijzonder veel waarde aan het exposeren van sluitende bewijsketens, zodat dus het deductieve element een bijzondere nadruk verkreeg. De nawerking van deze opvatting kunnen wij tot in onze tijd bespeuren. Natuurlijk vervullen deducties in de wiskunde een grote rol, maar een eenzijdige accentuering van dit aspect doet de aard van de wiskunde geweld aan. Immers, het creatieve element, het wekken van de fantasie, is tenminste zo belangrijk. Het niet bedoelde gevolg was dan ook, dat bij de meeste jonge leerlingen bij de aanvang direct een aversie ontstond tegen de meetkunde. Dit was niet het gevolg van een gebrek aan intelligentie, nog minder een gebrek aan zogenaamde wiskundige aanleg, maar eenvoudig een uitvloeisel van de omstandigheid, dat de gebruikelijke leergang geenszins belangstelling vermocht te wekken.
In de afgelopen tien jaren is de didactiek van het aanvangsonderwijs in de meetkunde een voorwerp geweest van grondige studie. Op dit terrein is bijzonder interessant pionierswerk verricht door het echtpaar Van Hiele - Van Hiele-Geldof. In 1954 is door Wimecos (vereniging van leraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Kosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) een commissie ingesteld, die voorstellen heeft gedaan inzake een nieuw leerplan voor de H.B.S.-B. In dit voorstel, dat de eerstkomende jaren wel sterk het onderwijs op de H.B.S. zal beheersen, is rekening gehouden met de nieuw verworven didactische inzichten, zodat de gewone leergang voor de meetkunde wordt voorafgegaan door een z.g. intuïtieve inleiding. De toekomst zal moeten leren in hoeverre het onderwijs in de meetkunde hiermede wezenlijk is verbeterd, want, gelijk vanzelf spreekt, men zal nog veel ervaring moeten opdoen met betrekking tot de keuze van de aanschouwelijke leerstof en de methodiek in het onderwijzen daarvan. Vooral voor oudere leraren kan dit moeilijkheden opleveren, omdat hun opvattingen nog zo diep zijn geworteld in de traditionele gedachtengang.

Prof. dr. J.C.H. Gerretsen in: Euclides 34 (1958-1959), blz. 90 - 91.

Oproep aan docenten

RIACA is het Research Instituut voor de Applicatie van Computer Algebra en is gehuisvest in de TUE bij de Faculteit Wiskunde en Informatica.

Een van de projecten van RIACA is het maken van interactieve voorkennistoetsen voor middelbare scholieren teneinde hun wiskunde-niveau te testen bij aanvang van hun studie aan de TUE. De technologie hiervoor is ontwikkeld. De toetsen kunnen via WWW-browsers worden afgenomen. Voor het aanmaken van toetsvragen zoekt RIACA docenten wiskunde.

Er is behoefte aan multiple choice vragen over de volgende onderwerpen uit de eindexamenstof VWO (ongeveer 100 vragen elk):

- differentiëren
- ruimtemeetkunde
- integreren
- vergelijkingen
- functie-onderzoek
- kansrekenen en statistiek

Meer informatie is te verkrijgen bij prof. Cohen, wetenschappelijk directeur RIACA, TUE, faculteit Wiskunde en Informatica, Postbus 513, 5600 MB Eindhoven, tel.: 040 247 4270, e-mail: amc@win.tue.nl.

Geïnteresseerden kunnen contact opnemen met Marianne Jonker, secretariaat RIACA, TUE, faculteit Wiskunde en Informatica, Postbus 513, 5600 MB Eindhoven,
tel.: 040 247 4231, e-mail: marjon@win.tue.nl.

Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap

Het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap zal in 1999 plaatsvinden op zaterdag 9 januari en wordt gehouden in het

Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium
Thorbeckeplein 1 , Amersfoort

Het symposium is in de eerste plaats bedoeld voor leraren, maar natuurlijk is iedere belangstellende van harte welkom.
Het symposium is dit keer gewijd aan **bewijzen**.
In twee voordrachten wordt aandacht besteed aan een aantal bewijzen en bewijsmethoden, waarbij onder andere bewijzen in de discrete wiskunde en bewijzen en pseudobewijzen uit de Griekse wiskunde aan de orde komen. In de derde lezing staat het bewijs in het wiskundeonderwijs centraal.

Programma

9.30 - 10.00	Ontvangst met koffie
10.00 - 11.00	**De charme van het bewijzen** prof. dr. R. Tijdeman
11.00 - 11.15	Pauze met koffie
11.15 - 12.15	**Bewijzen in de Griekse wiskunde** prof. dr. A.W. Grootendorst
12.15 - 13.30	Pauze, waarin men deel kan nemen aan een gezamenlijke lunch
13.30 - 14.30	**Bewijzen in het onderwijs** prof. dr. F.J. Keune

De deelname is gratis. Wie wil meedoen aan de gezamenlijke lunch wordt verzocht voor *31 december 1998* *ƒ* 17,50 over te maken op *gironummer 3391318*, *t.n.v. R. Bosch, Heiakker 16, 4841 CR Prinsenbeek*
Wie in aanmerking wil komen voor een certificaat vermeldt bij betaling: Certificaat. Indien u niet wilt deelnemen aan de lunch maar wel een certificaat wenst, stuurt u een briefje met dit verzoek naar bovengenoemd adres.
Voor inlichtingen kunt u bellen
076-5273267 (overdag) of 076-5419757 ('s avonds)

Verschenen

FC Algebra
Sport en cijfers
Hans van Maanen
Boom/Belvédère, Amsterdam
ISBN 90 535 2408 8
200 blz.

Een onuitputtelijke bron voor sommetjes over kansrekening, statistiek en meetkunde.

Wiskunde
Wetenschap van patronen en structuren
Keith Devlin
Wetenschappelijke bibliotheek van Natuur & Techniek, Beek
Vertaald door Jan van de Craats
ISBN 90 730 3553 8
216 blz., *f*76,50

De auteur probeert de essentie van de wiskunde over te brengen, zowel in haar wordingsgeschiedenis als in haar huidige, brede omvang. Het is voor een breed publiek bedoeld en veronderstelt weinig wiskundige voorkennis. De hoofdstuktitels zijn; tellen, redeneren en communiceren, beweging en verandering, vorm, symmetrie en regelmaat, positie.

De ontstelling van Pythagoras
Over de geschiedenis van de goddelijke proportie
Albert van der Schoot
KOK Agora, Kampen
ISBN 90 391 0754 8
442 blz.

Een boek geheel gewijd aan de Gulden Snede. Albert van de Schoot, docent esthetica en cultuurfilosofie aan de Universiteit van Amsterdam, laat zien dat de ideeëngeschiedenis van de Gulden Snede heel anders in elkaar steekt dan in vrijwel alle literatuur over dit onderwerp wordt voorgespiegeld.

Recreatie

Opgave 689

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

Op 23 juli 1981 gleed het eerste kubuskrantje van de Nederlandse Kubus Club door m'n brievenbus. Het waren vier gestencilde A-4 'tjes met als titel 'Cubism For Fun'. Het onderwerp was de pas verschenen draaikubus van Rubik. De initiatiefneemster was de vwo-scholiere *Anneke Treep*. Op 11 september verscheen 1e jaargang no. 1A met de aankondiging van de allereerste kubusdag op zaterdag 26 september 1981 in Poppentheater Merlijn te Haarlem.
Na 17 jaar is de club nog springlevend en verscheen onlangs nummer 47 van 'Cubism For Fun'. Op weg naar het gouden nummer 50! De onderwerpen zijn nu allerlei mechanische puzzels: schuifpuzzels, inpakproblemen, burr-puzzels, maar ook nog steeds varianten van de Kubus van Rubik!

Op zaterdag 4 oktober 1998 vond alweer de 18e kubusdag plaats, deze keer in Voorburg. Er werden door de 123 deelnemers veel puzzels geruild en gekocht. De Amerikaan Leslie E. Shader gaf een lezing over de 'Lights Out' puzzel. De Rus Vladimir Krasnoukhov had een grote tafel met schitterende, zelf ontworpen, puzzels. Zelfs een prachtig uitgevoerde puzzel ter herinnering aan deze dag in Voorburg! Ondergetekende ging met een doos vol nieuwe aanwinsten richting huis.

Op de fiets naar huis dacht ik na over een probleem dat een van de deelnemers me, bij de koffie, vertelde. Voor het maken van een puzzel had hij heel veel kleine houten kubusjes gemaakt. Allemaal even groot. Z'n zoontje van vijf stapelde ze op tot een grote kubus en toen hield hij een kubusje over. Toen dat ventje klaar was maakte hij de stapel weer kapot. Toen de vader alle kubusjes weer bij elkaar veegde bleek dat hij er een vierkant van kon maken!
We moeten dus oplossen $A^3 + 1 = B^2$, waarbij A en B gehele getallen zijn. Wiskundig zijn $(A, B) = (-1, 0)$ en $(0, \pm 1)$ mogelijke oplossingen. Maar wat zijn eigenlijk ALLE oplossingen van deze vergelijking? Uiteraard een bewijs dat er niet méér zijn dan de door u gevonden oplossingen.
Voor een correct bewijs ontvangt u 5 ladderpunten.
Graag binnen een maand inzenden.

P.S. Voor ƒ 30,– per jaar bent u ook lid van de NKC.
ABN AMRO bank: 558558054 tnv NKC, Woerden.

Oplossing 686

Recreatie

De opdracht was: **Start met het getal 4**
Pas dan één van de volgende regels toe:
1 Zet een 0 achter het getal.
2 Zet een 4 achter het getal.
3 Bij een even getal: deel door 2.

De getallen 1 tot en met 10 zijn gemakkelijk te maken:
4 → 2 → **1**
4 → **2**
4 → 2 → 24 → 12 → 6 → **3**
4
4 → 2 → 1 → 10 → **5**
4 → 2 → 24 → 12 → **6**
4 → 2 → 1 → 14 → **7**
4 → 2 → 24 → 12 → 6 → 64 → 32 → 16 → **8**
4 → 2 → 1 → 14 → 144 → 72 → 36 → 18 → **9**
4 → 2 → 1 → **10**

Stel dat $k = 10m + n$ het kleinste getal is, dat NIET op deze manier te maken is.
We laten nu zien dat het getal k WEL te maken is door een startwaarde te kiezen die kleiner is dan k.

$m \to 10m + 0$
$4m \to 40m + 4 \to 20m + 2 \to 10m + 1$
$2m \to 20m{+}4 \to 10m{+}2$
$8m + 2 \to 80m + 24 \to 40m + 12 \to 20m + 6 \to 10m + 3$
$m \to 10m + 4$
$2m + 1 \to 20m + 10 \to 10m + 5$
$4m + 2 \to 40m + 24 \to 20m + 12 \to 10m + 6$
$2m + 1 \to 20m + 14 \to 10m + 7$
$8m + 6 \to 80m + 64 \to 40m + 32 \to 20m + 16 \to 10m + 8$
$16m + 14 \to 160m + 144 \to 80m + 72 \to 40m + 36 \to$
$20m + 18 \to 10m + 9$

Helaas is de startwaarde $16m{+}14$ groter dan $10m{+}9$.
Wél kunnen we opmerken dat $16m{+}14$ een EVEN getal is, eindigend op resp. 4, 0, 6, 2 en 8.
Deze even getallen zijn te maken met een startwaarde kleiner dan $16m + 14$. (Zie het schema hierboven.)

Een voorbeeld: $k = 2499$.
$m = 249$: 3998 → 39984 → 19992 → 9996 → 4998 → 2499
$m = 399$: 3198 → 31984 → 15992 → 7996 → 3998
$m = 319$: 2558 → 25584 → 12792 → 6396 → 3198
$m = 255$: 2046 → 20464 → 10232 → 5116 → 2558

Eindelijk hebben we een startwaarde kleiner dan k gevonden.
m=204: 818 → 8184 → 4092 → 2046
m=81: 654 → 6544 → 3272 → 1636 → 818
m=65: 65 → 654
m=6: 13 → 130 → 65
m=1: 10 → 104 → 52 → 26 → 13
Tenslotte 4 → 2 → 1 → 10

Alle positieve gehele getallen zijn dus inderdaad op deze manier te maken!

Met 69 punten is winnaar van een boekenbon van ƒ 50,–:

Ton Kool
Van Beuningenlaan 14
3768 GG Soest

Heel hartelijk gefeliciteerd!

KALENDER

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in dit schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Voor of op die datum dienen uw mededelingen bij de hoofdredacteur te zijn. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
4	07-01-99	19-11-98
5	18-02-99	07-01-99
6	01-04-99	18-02-99
7	17-05-99	01-04-99
8	24-06-99	13-05-99

Data nieuwe schooljaar
Wil eenieder die relevante data heeft voor het nieuwe schooljaar deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur: cph@xs4all.nl

---

Wintersymposium 1999
Wiskundig Genootschap
za. 9 januari 1999
Thema: Bewijzen
Rob Bosch:
076-5273267
Zie aankondiging blz. 104

5e Mathematische Modelleercompetitie Maastricht
za. 23 januari 1999
Universiteit Maastricht:
043-3883834
Aankondiging volgt later

Nationale Wiskunde Dagen
vr. 5 en za. 6 februari 1999
Freudenthal instituut:
030 2611 611
Aankondiging volgt later

Kangoeroe 1999
vrijdag 19 maart 1999
Jan Donkers:
040-2472738
jand@win.tue.nl
Aankondiging volgt later

Wiskunde Olympiade 1999
Eerste ronde
vrijdag 9 april 1990
Fred Bosman:
026-3521294
Fred.Bosman@cito.nl
Aankondiging volgt later

Examendata
vbo/mavo C/D:
di. 18 mei 1999
havo wiskunde A:
ma. 17 mei 1999
havo wiskunde B:
wo. 26 mei 1999
vwo wiskunde A:
do. 27 mei 1999
vwo wiskunde B:
do. 20 mei 1999

9th International Congress on Mathematical Education (ICME)
31/6/00 - 6/8/00
Tokyo, Japan
www.ma.kagu.sut.ac.jp/~icme9/

Internetsites voor wiskundedocenten:

NVvW-website
Bezoek regelmatig de website van de NVvW. Boordevol actuele informatie
www.euronet.nl/~nvvw

WiskundE-brief
Docenten kunnen zich nog steeds aanmelden voor het e-mail-netwerk: WiskundE-brief.
Per e-mail wordt u dan op de hoogte gehouden van nieuws, reacties commentaren, etc.
Aanmelden bij:
Andriess@concepts.nl of GerardK@xs4all.nl

Ook voor leerlingen
Prachtige wiskunde op:
www-groups/dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html
Euclid's Elements:
aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html
Fractals
www.research.ibm.com/research/fractaltop.html

Niels Stensen College
Bezoek het wiskundelokaal van
www.nielsstensen.nl

Nationale Wiskunde Dagen 1999
www.fi.uu.nl/nwd

Wiskunde Olympiade
olympiads.win.tue.nl/nwo

Schoolnet België
www.digilife.be/schoolnet

Suggesties voor interessante sites graag zenden aan Kees Hoogland
e-mail: cph@xs4all.nl

Adv. Texas Instruments

overnemen uit
Euclides 74/2
pagina 3 omslag

Wolters-Noordhoff biedt u de keuze

Moderne wiskunde 7e editie
Netwerk 2e editie

Beschikbaar voor het schooljaar 1998/1999

Tweede Fase havo en vwo

	Moderne wiskunde 7e ed.		Netwerk 2e ed.		Domein
	Reeds verschenen:				
havo	A1 en B1 deel 1*		A1 en B1 deel 1*		Veranderingen, Tellen en Kansen
	A1 deel 2*		A1 deel 2*		Verbanden, Statistiek
	B1 deel 2*		B1 deel 2*		Toegepaste analyse 1, Ruimtemeetkunde 1
vwo	A1 en B1 deel 1*		A1 en B1 deel 1*		Functies en grafieken, Discrete analyse
	Zojuist verschenen:				
vwo	A1 en B1 deel 2		A1 en B1 deel 2		Combinatoriek en kansrekening
	A2 deel 1/B1 deel 3		A2 deel 1/B1 deel 3		Meetkunde
	Binnenkort verschijnt:				
havo	A2	dec. 98	A2	gereed	Toegepaste analyse, Binomiale verdeling
	B1 deel 3	dec. 98	B1 deel 3	dec. 98	Kansrekening en statistiek
	B2 deel 2	dec. 98	B2 deel 1	nov. 98	Ruimtemeetkunde 2
	B2 deel 1	jan. 99	B2 deel 2	apr. 99	Toegepaste analyse 2

Basisvorming

Moderne wiskunde 7e ed.	Netwerk 2e ed.
Reeds verschenen:	
1a havo vwo*	1 havo vwo*
1b havo vwo*	
1a mavo havo (vwo)*	1 mavo havo (vwo)*
1b mavo havo (vwo)*	
1a vbo mavo*	1 vbo mavo*
1b vbo mavo*	
Zojuist verschenen:	
1a vbo	1 vbo
1b vbo	

*) U vindt deze delen in de beoordelingspakketten. Heeft u nog geen pakket aangevraagd? Neem dan contact op met onze voorlichter Elka van der Steeg. Bent u gebruiker van Moderne wiskunde 7e editie of Netwerk 2e editie? Dan kunt u gebruikersexemplaren aanvragen van de zojuist verschenen en binnenkort te verschijnen delen van uw methode: Elka van der Steeg, tel (050) 522 63 11, fax (050) 522 62 55, email: voorlichting.vo.exact@wolters.nl.

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

Wolters Noordhoff

419/8229